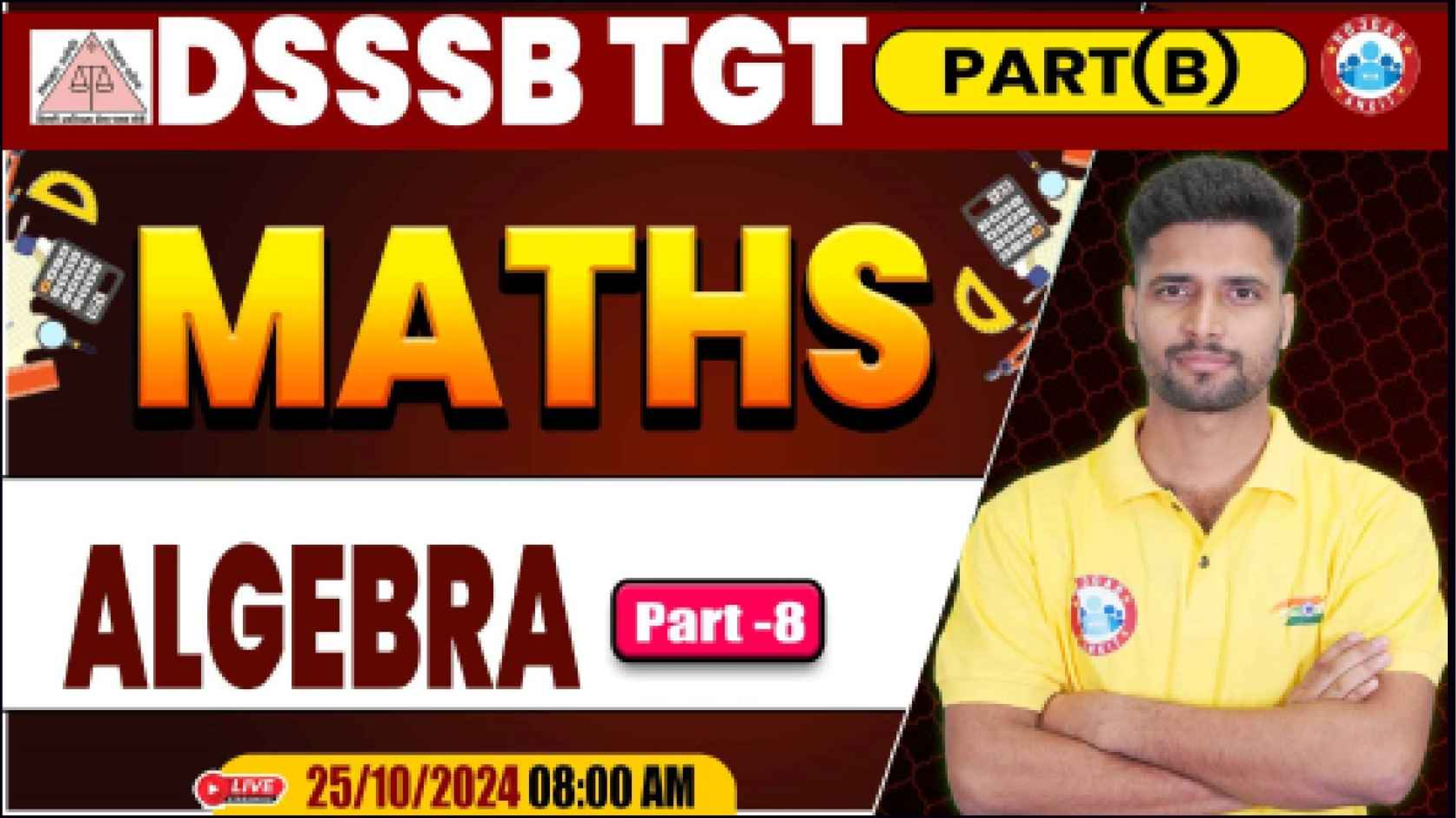
DSSSB TGT
PART(B)
MATHS
ALGEBRA
Part -8
LIVE
25/10/2024 08:00 AM

Introduction:-

In this Class-12, we will discuss the following Concepts
इस कक्षा-12 में, हम निम्नलिखित अवधारणाओं पर चर्चा करेंगे

> Linear Combination of vectors वैक्टर का रैखिक संयोजन

> Spanning set स्पैनिंग सेट

> Linear Span रैखिक स्पैन

> Finitely and Infinitely Generated Vector Space परिमित और अनंत रूप से उत्पन्न वेक्टर स्पेस

> Properties Or Theorems गुण या प्रमेय

> Next, we will discuss Class – 13 इसके बाद, हम कक्षा -13 पर चर्चा करेंगे

Linear combination of vectors

A vector $v \in V(F)$ is said to be a linear combination of the vectors $v_1, v_2, \dots . v_n \in V$ if v can be expressed as $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots a_nv_n$, where $a_1, a_2, \dots . a_n \in F$ are scalars.

एक सदिश v∈V(F) को सदिशों $v_1, v_2, \dots . v_n \in V$ का रैखिक संयोजन कहा जाता है यदि v को $\boxed{v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots a_nv_n}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ $a_1, a_2, \dots . a_n \in F$ अदिश हैं।

Example-1

If $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,0,1)$ and $v_3 = (1,0,0)$, then vector $v = (9,2,6)$ is a linear combination of the vectors v_1, v_2 and v_3 as v can be expressed as $v = 2v_1 + 4v_2 + 3v_3$

यदि $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,0,1)$ और $v_3 = (1,0,0)$ है, तो सदिश v=(9,2,6) सदिश v_1, v_2 और v_3 का रैखिक संयोजन है क्योंकि v को $v = 2v_1 + 4v_2 + 3v_3$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है

$(9,2,6) = (2,2,2) + (4,0,4) + (3,0,0)$

Example-2

Zero vector $\mathbf{0}$ is always a linear combination of any finite number of vectors $v_1, v_2, \ldots . v_n$, since $\mathbf{0} = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$

शून्य सदिश 0 हमेशा किसी भी परिमित संख्या में सदिशों $v_1, v_2, \ldots . v_n$ का रैखिक संयोजन होता है, क्योंकि $\mathbf{0} = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$

Spanning Set

Let $S = \{v_1, v_2, \dots . v_n\}$ be a subset of a vector space $\mathrm{V(F)}$, then set S is said to be spanning set (or generating set) for vector space $\mathrm{V(F)}$ if every vector in V is a linear combination of the vectors in S.

मान लें $S = \{v_1, v_2, \dots . v_n\}$ सदिश समष्टि V(F) का एक उपसमुच्चय है, तो समुच्चय S को सदिश समष्टि V(F) के लिए फैलाव समुच्चय (या जनरेटिंग समुच्चय) कहा जाता है यदि V में प्रत्येक सदिश S में सदिशों का एक रैखिक संयोजन है।

Note:- If S is spanning set for V, then we say that the vector space V is spanned by S or the set S spans V.

नोटः- यदि S, V के लिए फैला हुआ सेट है, तो हम कहते हैं कि सदिश समष्टि V, S द्वारा फैला हुआ है या सेट S, V को फैलाता है।

Example:-

$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ **is a spanning set for** R^3**.**

$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}R^3$ **के लिए एक स्पैनिंग सेट है।**

Because each vector $(x,y,z) \in R^3$ **can be expressed as**

क्योंकि प्रत्येक वेक्टर $(x,y,z) \in R^3$ **को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है**

$$\boxed{(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)}$$

Linear Span

Let $S = \{v_1, v_2, \dots . v_n\}$ **be a non-empty subset of a vector space** $V(F)$**, then the set of all linear combinations of finite set of elements of** S **is called Linear Span of** S**. It is denoted by** $L(S)$ **or** $< S >$

मान लें $S = \{v_1, v_2, \dots . v_n\}$ **एक सदिश समष्टि** V(F) **का एक रिक्त उपसमुच्चय है, तो** S **के तत्वों के परिमित समुच्चय के सभी रैखिक संयोजनों के समुच्चय को** S **का रैखिक फैलाव कहा जाता है। इसे** L(S) **या** <S > **द्वारा दर्शाया जाता है**

i.e $\boxed{L(S)}$ **or** $\boxed{\langle S\rangle} = \langle v_1, v_2, \dots . v_n\rangle = \{\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\}$

Where $a_i \in F, v_i \in S$ **and n is finite.**

जहाँ $a_i \in F, v_i \in S$ **तथा** n **परिमित है।**

$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \dots . a_nv_n$

Finitely and Infinitely Generated Vector Space

A vector space $V(F)$ is said to be finitely generated vector space if there exists a finite subset S of V such that all the elements of V are generated by the elements of S.

एक सदिश समष्टि V(F) को परिमित रूप से जनित सदिश समष्टि कहा जाता है यदि V का एक परिमित उपसमुच्चय S विद्यमान हो, जिससे कि V के सभी अवयव S के अवयवों द्वारा जनित हों।

i.e $\boxed{\mathrm{V} = \mathrm{L}(\mathrm{S}).}$

Vector space

Subset of vector space

For Example:-

- R^n is a finitely generated vector space. Because it is generated by finite set $S = \{v_1, v_2, \dots . v_n\}$
R^n एक परिमित रूप से उत्पन्न सदिश स्थान है। क्योंकि यह परिमित सेट $S = \{v_1, v_2, \dots . v_n\}$ द्वारा उत्पन्न होता है

- If a vector space $V(F)$ can-not be generated by a finite number of vectors, then it is said to be infinitely generated vector space.
यदि एक सदिश समष्टि V(F) को सदिशों की एक सीमित संख्या द्वारा उत्पन्न नहीं किया जा सकता है, तो इसे अनंत रूप से उत्पन्न सदिश समष्टि कहा जाता है।

For example:-

The vector space $P(R)$ of all polynomials in x over a field R is infinitely generated vector space because the set of infinite vectors $\{1, x, x^2, x^3, \dots . x^n, \dots ..\}$ generates $\mathrm{P(R)}$ but there exists no finite set of vectors which can generate $P(R)$.

क्षेत्र R पर x में सभी बहुपदों का सदिश समष्टि P(R) अनंत रूप से जनित सदिश समष्टि है क्योंकि अनंत सदिशों का समूह $\{1, x, x^2, x^3, \dots . x^n, \dots ..\}P(R)$ उत्पन्न करता है लेकिन सदिशों का कोई परिमित समूह मौजूद नहीं है जो P(R) उत्पन्न कर सके।

Properties OR Theorems

1. In a vector space V, $L(S)$ is the smallest subspace containing S.

सदिश समष्टि V में, L(S) वह सबसे छोटा उपसमष्टि है जिसमें S है।

2. In a vector space $\boxed{L(S) = S}$ iff S is a subspace of V.

सदिश समष्टि में L(S)=S यदि और केवल यदि S, V का उपसमष्टि है।

Results:-

1. If $S = \emptyset$ then $\mathrm{L}(\mathrm{S}) = \{0\}$
2. If $S_1 \subseteq S_2$, then $L(S_1) \subseteq L(S_2)$

Basis of a vector space

Let $\mathrm{V(F)}$ be a vector space. A subset $S = \{v_1, v_2, \dots\dots v_n\}$ of V is said to be a basis of V, if

मान लीजिए V(F) एक सदिश समष्टि है। V का उपसमुच्चय $S = \{v_1, v_2, \dots\dots v_n\}V$ का आधार कहलाता है, यदि

1. $v_1, v_2, \dots. v_n$ are linearly independent vectors.

$v_1, v_2, \dots\dots v_n$ रैखिक रूप से स्वतंत्र सदिश हैं।

2. $v_1, v_2, \dots\dots v_n$ span V . i.e $\boxed{\mathrm{V = L(S)}}$ i.e every vector of V is a linear combination of the vectors of S.

$v_1, v_2, \dots\dots v_n V$ का विस्तार करते हैं। अर्थात V=L(S) अर्थात V का प्रत्येक सदिश S के सदिशों का एक रैखिक संयोजन है।

Some Examples of Standard Basis

1. The vectors $(1,0)$ and $(0,1)$ form a basis for $R^2(R)$.
सदिश (1,0) और $(0,1) R^2(R)$ के लिए आधार बनाते हैं।

2. The vectors $(1,0,0), (0,1,0)$ and $(0,0,1)$ form a basis for $R^3(R)$.
सदिश (1,0,0),(0,1,0) और $(0,0,1) R^3(R)$ के लिए आधार बनाते हैं।

3. The vectors $(1,0, \ldots \ldots ,0), (0,1, \ldots ,0), \ldots \ldots (0,0, \ldots \ldots ,1)$ form a basis for $R^n(R)$.
सदिश $(1,0, \ldots \ldots ,0), (0,1, \ldots ,0), \ldots \ldots (0,0, \ldots \ldots ,1) R^n(R)$ के लिए आधार बनाते हैं।

4. The set $\{1, i\}$ is a basis for $C(R)$.
सेट {1,i} C(R) के लिए आधार है।

5. The set $\{1\}$ is a basis for $R(R)$.
सेट {1} R(R) के लिए आधार है।

6. The vectors $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ $(i,0,0), (0,i,0)$ and $(0,0,i)$ form a basis for $C^3(R)$.

सदिश (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) (i,0,0),(0,i,0) और $(0,0,i)C^3(R)$ के लिए आधार बनाते हैं।

7. If $P_n(x)$ denotes the vector space of all polynomial of degree atmost ' n ', then the set $\{1, x, x^2, ... x^n\}$ is a standard for $P_n(x)$.

यदि $P_n(x)$ अधिकतम 'n' घात वाले सभी बहुपदों के सदिश समष्टि को निरूपित करता है, तो समुच्चय $\{1, x, x^2, ... x^n\} P_n(x)$ के लिए एक मानक है।

8. The set $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ is a standard for $P_5(x)$.

समुच्चय $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\} P_5(x)$ के लिए एक मानक है।

9. The set $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ is a basis for $M_{2\times2}(\mathrm{R})$.

समुच्चय $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\} M_{2\times2}(R)$ के लिए एक आधार है।

Results:-

1. The set $\emptyset$ is a basis for $\{0\}$.

सेट ø {0} के लिए एक आधार है।

2. A basis of a vector space is a Linearly Independent set but a Linearly Independent set of vectors need not be a basis of V since these linearly independent vectors may not span V.

एक सदिश समष्टि का आधार एक रैखिक रूप से स्वतंत्र सेट होता है, लेकिन सदिशों के एक रैखिक रूप से स्वतंत्र सेट को V का आधार होने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि ये रैखिक रूप से स्वतंत्र सदिश V को नहीं फैला सकते हैं।

Properties OR Theorems on Basis

1. If $S = \{v_1, v_2, \dots . v_n\}$ is a basis of V(F), then every element of V can be uniquely expressed as a linear combination of $v_1, v_2, \dots .. v_n$ and conversely.

यदि $S = \{v_1, v_2, \dots . v_n\} V(F)$ का आधार है, तो V के प्रत्येक तत्व को $v_1, v_2, \dots .. v_n$ के रैखिक संयोजन के रूप में विशिष्ट रूप से व्यक्त किया जा सकता है और इसके विपरीत।

2. If $S = \{v_1, v_2, \dots . v_n\}$ spans a vector space V(F), then there exists a subset of S which is a basis of V .

यदि $S = \{v_1, v_2, \dots . v_n\}$ एक सदिश समष्टि V(F) को फैलाता है, तो S का एक उपसमुच्चय मौजूद होता है जो V का आधार होता है।

3. If $S = \{v_1, v_2, \dots \dots v_n\}$ spans $\mathrm{V(F)}$, then any $n + 1$ vectors in V are linearly dependent.

यदि $S = \{v_1, v_2, \dots \dots v_n\} V(F)$ को फैलाता है, तो V में कोई भी n+1 सदिश रैखिक रूप से आश्रित होते हैं।

4. If $S = \{v_1, v_2, \ldots\ldots v_n\}$ is linearly independent and $v \notin \langle S \rangle$, then the set $\boxed{S \cup \{v\}}$ is linearly independent.

यदि $S = \{v_1, v_2, \ldots\ldots v_n\}$ रैखिक रूप से स्वतंत्र है और $v \notin \langle S \rangle$ है, तो सेट $S \cup \{v\}$ रैखिक रूप से स्वतंत्र है।

5. If V is a finitely generated vector space, then any two bases of V have the same number of elements.

यदि V एक परिमित रूप से उत्पन्न सदिश समष्टि है, तो V के किसी भी दो आधारों में तत्वों की संख्या समान होती है।