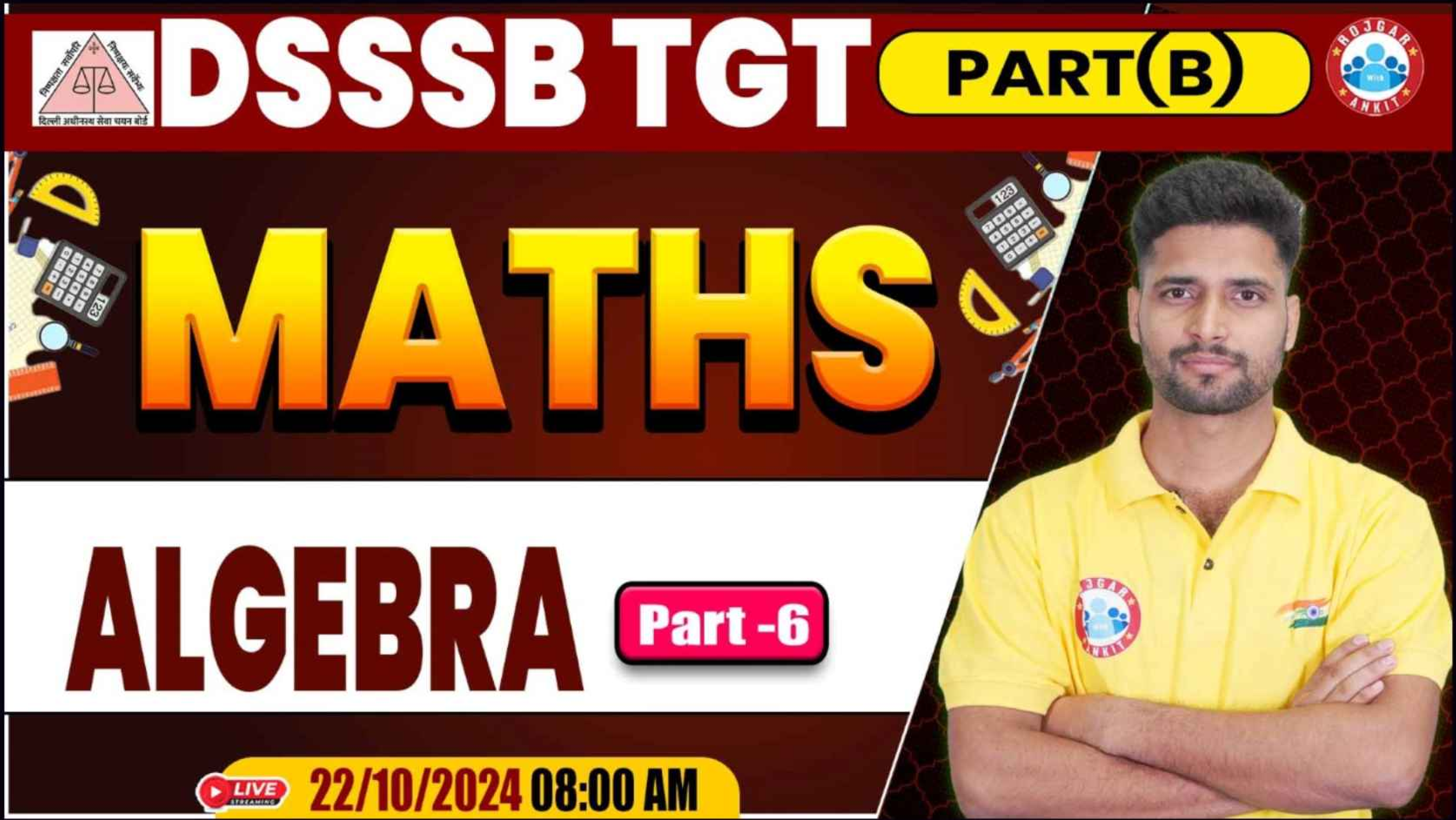
दिल्ली अधीनस्थ सेवा चयन बोर्ड
DSSSB TGT
PART (B)
ROJGAR with ANKIT
MATHS
ALGEBRA
Part -6
LIVE STREAMING
22/10/2024 08:00 AM

Linear Sum of Subspaces

If W_1 and W_2 are two subspaces of a vector space $V(F)$, then the Linear sum of W_1 and W_2 is denoted by

यदि W_1 और W_2 एक सदिश समष्टि V(F) के दो उपसमष्टि हैं, तो W_1 और W_2 का रैखिक योग इस प्रकार दर्शाया जाता है

$W_1 + W_2$ and it is defined as, $W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1$ and $w_2 \in W_2\}$

W_1 $+ W_2$ और इसे इस प्रकार परिभाषित किया जाता है, $W_1 + W_2 =$ $\{\boxed{w_1 + w_2} : w_1 \in W_1$ और $w_2 \in W_2\}$

linear sum (denote)

$W_1 \leftarrow V(F) \rightarrow W_2$

Result / Theorem

The Linear sum of two subspaces W_1 and W_2 is also a subspace of the vector space $\mathrm{V(F)}$.

दो उप-स्थानों W_1 और W_2 का रैखिक योग भी सदिश स्थान V(F) का एक उप-स्थान है।

$$\left(+ \begin{matrix} W_1 \\ \\ W_2 \end{matrix} \right. \to V(F)$$

Subspace Generated by a Set

Let $V(F)$ be a vector space and $S \subseteq V$. Then W is said to be subspace generated by S , if W is the smallest subspace of V containing S and is denoted by $\boxed{W = \langle S \rangle}$

मान लें कि V(F) एक सदिश समष्टि है और S⊆V. तब W को S द्वारा जनित उपसमष्टि कहा जाता है, यदि W, S को समाहित करने वाला V का सबसे छोटा उपसमष्टि है और इसे W=⟨S⟩ द्वारा दर्शाया जाता है

$S \subseteq V$

$W \subseteq V$

Result / Theorem

The Linear sum of two subspaces W_1 and W_2 of a vector space $V(F)$ is a subspace generated by the union of W_1 and W_2, i.e $\boxed{W_1 + W_2 = < W_1 \cup W_2 >}$

एक सदिश समष्टि V(F) के दो उपसमष्टि W_1 और W_2 का रैखिक योग W_1 और W_2 के ~~[illegible]~~ से उत्पन्न एक उपसमष्टि है, अर्थात $W_1 + W_2 = < W_1 \cup W_2 >$ सम्मिलन)

Direct Sum of Subspaces

A vector space V is said to be the direct sum of its two subspaces W_1 and W_2 if every $v \in V$ can be uniquely expressed as

एक सदिश समष्टि V को उसके दो उपसमष्टि W_1 और W_2 का प्रत्यक्ष योग कहा जाता है यदि प्रत्येक v∈V को विशिष्ट रूप से इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$v = w_1 + w_2, \text{ where } w_1 \in W_1 \text{ and } w_2 \in W_2$$

Note:-

The direct sum of W_1 and W_2 is denoted by $\boxed{W_1 \oplus W_2}$ and it is write as $V = W_1 \oplus W_2$

W_1 और W_2 का सीधा योग $W_1 \oplus W_2$ द्वारा दर्शाया जाता है और इसे $V = W_1 \oplus W_2$ के रूप में लिखा जाता है

$A \cap B = \phi$

Disjoint Subspaces

Let $\mathrm{V(F)}$ be a vector space. Two subspace W_1 and W_2 of V are said to be disjoint if their intersection is the null space (Zero space). i.e $W_1 \cap W_2 = \phi$. or 0.

मान लीजिए V(F) एक सदिश समष्टि है। V के दो उपसमष्टि W_1 और W_2 को असंयुक्त कहा जाता है यदि उनका प्रतिच्छेद शून्य समष्टि (शून्य समष्टि) है। अर्थात $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Result / Theorem

The vector space $V(F)$ is the direct sum of its subspaces W_1 and W_2 if

सदिश समष्टि V(F) अपने उपसमष्टि W_1 तथा W_2 का प्रत्यक्ष योग है यदि और केवल यदि

$$\boxed{V = W_1 + W_2} \text{ and } W_1 \cap W_2 = 0$$

Example:- **To understand Direct sum and Linear sum**

Case-1

If $W_1 = \{(a, b, 0): a, b \in R\}, W_2 = \{(0,0, c): c \in R\}$ **are two subspaces of** $V_3(R) = \{(a, b, c): a, b, c \in R\}$**, then any vector** $(a, b, c) \in V_3(R)$ **can be uniquely expressed as**

$$\boxed{(a, b, c) = (a, b, 0) + (0,0, c)}$$

$\therefore V_3 = W_1 \oplus W_2$**, which represents the Direct Sum.**

Case-2

$\frac{2a}{2}$

If $W_1 = \{(a, b, 0) : a, b \in R\}$, $W_2 = \{(a, 0, c) : a, c \in R\}$ **are two subspaces of** $V_3(R) = \{(a, b, c) : a, b, c \in R\}$, **then any vector** $(a, b, c) \in V_3(R)$ **can be expressed as**

(i) $(a, b, c) = \left(\frac{a}{2}, b, 0\right) + \left(\frac{a}{2}, 0, c\right)$, **where**

$\left(\frac{a}{2}, b, 0\right) \in W_1$ **and** $\left(\frac{a}{2}, 0, c\right) \in W_2$

(ii) $(a, b, c) = \left(\frac{a}{4}, b, 0\right) + \left(\frac{3a}{4}, 0, c\right)$, **where**

$\left(\frac{a}{4}, b, 0\right) \in W_1$ **and** $\left(\frac{3a}{4}, 0, c\right) \in W_2$

Here, we observed that in case -2 any vector (a, b, c) **of** V_3 **can-not be uniquely expressed as the sum of elements of** W_1 **and** W_2**. Hence it shows the Linear sum.**

यहाँ, हमने देखा कि केस -2 में V_3 **का कोई भी वेक्टर** $(a, b, c)W_1$ **और** W_2 **के तत्वों के योग के रूप में विशिष्ट रूप से व्यक्त नहीं किया जा सकता है। इसलिए यह रैखिक योग दर्शाता है।**