



DSSSB TGT

PART(B)



MATHS

ALGEBRA

Part -5



21/10/2024 08:00 AM



Introduction:-

In this Class - 8, we will discuss the following Concepts

इस कक्षा - 8 में, हम निम्नलिखित अवधारणाओं पर चर्चा करेंगे

- Binary operation बाइनरी ऑपरेशन
- Internal and External binary operations आंतरिक और बाहरी बाइनरी ऑपरेशन
- Field फ़ील्ड
- Vector Space वेक्टर स्पेस
- Next, we will discuss Class – 9 इसके बाद, हम कक्षा - 9 पर चर्चा करेंगे

Binary operation

Let G be a non-empty set. A function $*: G \times G \rightarrow G$ is called a binary operation on G, if $a * b \in G$ for all $a, b \in G$.

मान लीजिए G एक गैर-रिक्त सेट है। एक फंक्शन $*: G \times G \rightarrow G$ को G पर बाइनरी ऑपरेशन कहा जाता है, अगर all $a, b \in G$ के लिए $a * b \in G$ हो।

function
(a, b)

In other words,

An operation which combines two elements of a set to give another element of the same set is called a binary operation or a binary composition.

वह संक्रिया जो किसी समुच्चय के दो तत्वों को संयोजित करके उसी समुच्चय का एक अन्य तत्व देती है, द्विआधारी संक्रिया या द्विआधारी संयोजन कहलाती है।

Note:-

Generally binary operation is denoted by '*' and a * b is read as 'a operation b'.

सामान्यतः बाइनरी ऑपरेशन को '*' से दर्शाया जाता है तथा a * b को 'a ऑपरेशन b' के रूप में पढ़ा जाता है।

Example-1

Addition ' + ' is a binary operation on Z (set of integers) For $a, b \in Z$, we get $\underline{a} + \underline{b} \in Z$.

जोड़ ' + ' Z (पूर्णांकों का समूह) पर एक बाइनरी ऑपरेशन है। $a, b \in Z$ के लिए, हमें $a+b \in Z$ मिलता है।



Example-2

Matrix addition '+' and matrix multiplication ' $\times$ ' are also binary operations on M , where M is the set of all 2×2 matrix over reals. i.e

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in R \right\}.$$

मैट्रिक्स योग '+' और मैट्रिक्स गुणन ' $\times$ ' भी M पर बाइनरी ऑपरेशन हैं, जहाँ M वास्तविक संख्याओं पर सभी 2×2 मैट्रिक्स का सेट है। यानी $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \underline{a, b, c, d \in R} \right\}.$

Example-3

Subtraction ' - ' is not a binary operation on N (set of natural numbers). As $2 - 3 = -1 \notin N$.

घटाव ' - ' N (प्राकृतिक संख्याओं का समूह) पर बाइनरी ऑपरेशन नहीं है। चूँकि $2-3=-1 \notin N$.

Internal and External Binary operation

Internal Binary operation

Let V be a non-empty set, if $u * v \in V$ for all $u, v \in V$ and $u * v$ is **unique**, then the binary operation ' $*$ ' is an internal binary operation on V .

मान लीजिए V एक रिक्त समुच्चय है, यदि सभी $u, v \in V$ के लिए $u * v \in V$ तथा $u * v$ अद्वितीय है, तो बाइनरी ऑपरेशन ' $*$ ' V पर एक आंतरिक बाइनरी ऑपरेशन है।

External Binary operation

Let V and F be two non-empty sets, if for each $u \in V$ and $a \in F$ $a * u \in V$ and $a * u$ is unique, then the binary operation ' $*$ ' is an external binary operation on V over F .

मान लीजिए V और F दो अरिक्त समुच्चय हैं, यदि प्रत्येक $u \in V$ और $a \in F$ के लिए $a * u \in V$ और $a * u$ अद्वितीय है, तो बाइनरी ऑपरेशन ' $*$ ' V पर F पर एक बाह्य बाइनरी ऑपरेशन है।

Field

Let F be a non-empty set with at least two elements associated with two binary operations defined by ' + ' and ' . ' respectively. Then the algebraic structure $(F, +, \cdot)$ is a field if the following properties are satisfied:

मान लीजिए कि F एक गैर-रिक्त सेट है जिसमें कम से कम दो तत्व हैं जो क्रमशः ' + ' और ' $\cdot$ ' द्वारा परिभाषित दो बाइनरी ऑपरेशन से जुड़े हैं। तब बीजीय संरचना $(F, +, \cdot)$ एक फ़ील्ड है यदि निम्नलिखित गुण संतुष्ट हैं:

Axioms of Addition:-

1. Closure Law : $a \oplus b \in F$ for all $a, b \in F$ *field*

समापन नियम: सभी $a, b \in F$ के लिए $a + b \in F$

2. Commutative Law : $a \oplus b = b \oplus a$ for all $a, b \in F$ *field*

विनिमेय नियम: सभी $a, b \in F$ के लिए $a + b = b + a$

3. Associative Law : $a + (b + c) = (a + b) + c$ for all $a, b, c \in F$

साहचर्य नियम: सभी $a, b, c \in F$ के लिए $a + (b + c) = (a + b) + c$

4. Existence of Identity : for all $a \in F$, there exists an element $0 \in F$ such that $a + 0 = 0 + a = a$

~~जल्पा (अभा)~~ का अस्तित्व: सभी $a \in F$ के लिए, एक तत्व $0 \in F$ मौजूद है जैसे कि $a + 0 = 0 + a = a$

5. Existence of Inverse : for each $a \in F$, there exists an element $b \in F$ such that $a + b = b + a = 0$. Here element b is called inverse (additive inverse) of a and it is denoted by $-a$.

व्युत्क्रम का अस्तित्व: प्रत्येक $a \in F$ के लिए, एक तत्व $b \in F$ मौजूद है जैसे कि $a + b = b + a = 0$. यहाँ तत्व b को a का व्युत्क्रम (योज्य व्युत्क्रम) कहा जाता है और इसे $-a$ द्वारा दर्शाया जाता है।

Axioms of Multiplication :

1. Closure Law : for all $a, b \in F$, the element $a \cdot b \in F$

समापन नियम: सभी $a, b \in F$ के लिए, तत्व $a \cdot b \in F$

2. Commutative Law : $a \cdot b = b \cdot a$ for all $a, b \in F$

विनिमेय नियम: सभी $a, b \in F$ के लिए $a \cdot b = b \cdot a$

3. Associative Law: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ for all $a, b, c \in F$

साहचर्य नियम: सभी $a, b, c \in F$ के लिए $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

4. Existence of Identity: For each $a \in F$, there exists an element $1 \in F$ such that $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

~~व्युत्क्रम~~ का अस्तित्व: प्रत्येक $a \in F$ के लिए, एक तत्व $1 \in F$ मौजूद है जैसे कि $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

5. Existence of Inverse : for each non-zero element $a \in F$, there exists an element $b \in F$ such that $a \cdot b = b \cdot a = 1$. Here element b is called multiplicative inverse of a and it is denoted by $\frac{1}{a}$

व्युत्क्रम का अस्तित्व: प्रत्येक गैर-शून्य तत्व $a \in F$ के लिए, एक तत्व $b \in F$ मौजूद है जैसे कि $a \cdot b = b \cdot a = 1$. यहाँ तत्व b को a का गुणात्मक व्युत्क्रम कहा जाता है और इसे $\frac{1}{a}$ द्वारा दर्शाया जाता है

Distributive Law :

Multiplication is distributive with respect to addition.

गुणन योग के संबंध में वितरणात्मक है।

i.e for all $a, b, c \in F$

$$(i) \ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(ii) \ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Note:-

1. If R be a Set of real numbers, then $(R, +, \cdot)$ is always a field.

यदि R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है, तो $(R, +, \cdot)$ सदैव एक क्षेत्र होता है।

2. If C be a Set of complex numbers, then $(C, +, \cdot)$ is always a field.

यदि C सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय है, तो $(C, +, \cdot)$ सदैव एक क्षेत्र होता है।

Vector Space

Let F be a field. A vector space over F , is a non-empty set V together with two operations (called addition and scalar multiplication) such that for each $u, v \in V$, there is a unique element $u + v \in V$ and for $a \in F$ and $u \in V$ there is a unique element $au \in V$ and it satisfies the following conditions :

मान लीजिए F एक क्षेत्र है। F पर एक सदिश समष्टि, एक गैर-रिक्त समुच्चय V है, जिसमें दो संक्रियाएँ (जिन्हें योग और अदिश गुणन कहते हैं) इस प्रकार हैं कि प्रत्येक $u, v \in V$ के लिए एक अद्वितीय तत्व $u + v \in V$ है तथा $a \in F$ और $u \in V$ के लिए एक अद्वितीय तत्व $au \in V$ है तथा यह निम्नलिखित शर्तों को पूरा करता है:

Internal operations

addition

1. $u + (v + w) = (u + v) + w$ for all $u, v, w \in V$ (Associativity)

$u + (v + w) = (u + v) + w$ सभी $u, v, w \in V$ के लिए (सहयोगिता)

2. $u + v = v + u$, for all $u, v \in V$ (Commutativity)

$u + v = v + u$, सभी $u, v \in V$ के लिए (विनिमेयता)

3. There exists an element $0 \in V$ such that $u + 0 = u = 0 + u$, for all $u \in V$ (Existence of Identity element)

एक तत्व $0 \in V$ मौजूद है जैसे कि $u + 0 = u = 0 + u$, सभी $u \in V$ के लिए (पहचान तत्व का अस्तित्व)

4. For each $u \in V$, there exists a unique element $-u \in V$ such that $u + (-u) = 0 = (-u) + u$ (Existence of additive inverse)

प्रत्येक $u \in V$ के लिए, एक अद्वितीय तत्व $-u \in V$ मौजूद है जैसे कि $u + (-u) = 0 = (-u) + u$ (योज्य व्युत्क्रम का अस्तित्व)

External operations

multiplication addition

1. $a(u + v) = au + av$ for all $a \in F$ and $u, v \in V$. (scalar multiplication is distributive over addition in V)

$a(u+v)=au+av$ सभी $a \in F$ तथा $u, v \in V$ के लिए। (स्केलर गुणन V में योग पर वितरणात्मक है)

2. $(a + b)u = au + bu$ for all $a, b \in F$ and $u \in V$ (scalar multiplication is distributive over addition in F)

$(a+b)u=au+bu$ सभी $a, b \in F$ तथा $u \in V$ के लिए। (स्केलर गुणन F में योग पर वितरणात्मक है)

3. $(ab)u = a(bu)$, for all $a, b \in F$ and $u \in V$.

$(ab)u=a(bu)$, सभी $a, b \in F$ तथा $u \in V$ के लिए।

4. $1u = u$, for all $u \in V$, where 1 is the multiplication Identity of F .

$1u=u$, सभी $u \in V$ के लिए, जहाँ 1 F की गुणन पहचान है।

Note:-

1. The elements of F are called scalars and the elements of V are called vectors.

F के तत्वों को अदिश कहा जाता है और V के तत्वों को सदिश कहा जाता है।

2. A vector space over a field F is denoted by $V(F)$ or simply V .

किसी क्षेत्र F पर सदिश समष्टि को $V(F)$ या केवल V द्वारा दर्शाया जाता है।

3. Any field forms a Vector space over itself.

कोई भी क्षेत्र अपने ऊपर एक सदिश समष्टि बनाता है।

4. If H be a subfield of a field F , then F can be consider as a vector space over H . i.e $F(H)$ is vector space.

यदि H किसी क्षेत्र F का उपक्षेत्र है, तो F को H पर एक सदिश समष्टि के रूप में माना जा सकता है। अर्थात् $F(H)$ एक सदिश समष्टि है।

Example -1 If C be a set of complex numbers and R be a set of real numbers then $C(R)$ is always a vector space.

यदि C सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय हो और R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय हो तो $C(R)$ सदैव एक सदिश समष्टि होती है।

Example -2 If C be a set of complex numbers and R be a set of real numbers then $R(C)$ is not a vector space.

यदि C सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय हो और R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय हो तो $R(C)$ एक सदिश समष्टि नहीं है।

Introduction:-

In this Class-9, we will discuss the following Concepts

इस कक्षा-9 में, हम निम्नलिखित अवधारणाओं पर चर्चा करेंगे

> Vectors in R^n R^n में सदिश

> Subspace उप-स्थान

> Properties OR Theorems on Vector Subspaces सदिश उप-स्थानों पर गुण या प्रमेय

> Next, we will discuss Class – 10 इसके बाद, हम कक्षा - 10 पर चर्चा करेंगे

Vectors in R^n

- Set R of real numbers is considered as the Euclidean Line, i.e as Euclidean 1 - space denoted by R .
वास्तविक संख्याओं के सेट R को यूक्लिडियन रेखा माना जाता है, अर्थात यूक्लिडियन 1 - स्पेस जिसे R द्वारा दर्शाया जाता है।
- Set of all ordered pairs (a_1, a_2) of real numbers is called Euclidean 2 - space and is denoted by R^2 .
वास्तविक संख्याओं के सभी क्रमित युग्मों (a_1, a_2) के सेट को यूक्लिडियन 2 - स्पेस कहा जाता है और इसे R^2 द्वारा दर्शाया जाता है।

- Set of all ordered triples (a_1, a_2, a_3) of real numbers is called Euclidean 3 – space and is denoted by R^3 .

वास्तविक संख्याओं के सभी क्रमित त्रिकों (a_1, a_2, a_3) के सेट को यूक्लिडियन 3- स्पेस कहा जाता है और इसे R^3 द्वारा दर्शाया जाता है।

- Set of all n-tuples $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ of real numbers is called Euclidean n – space and is denoted by R^n .

वास्तविक संख्याओं के सभी n-टपल $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ के सेट को यूक्लिडियन n- स्पेस कहा जाता है और इसे R^n द्वारा दर्शाया जाता है।

Note:-

1. An ordered n-tuple of real numbers is called a real n - vector.

वास्तविक संख्याओं के क्रमित n -टपल को वास्तविक n -वेक्टर कहा जाता है।

2. Euclidean n - space is also denoted by R_n .

यूक्लिडियन n -स्पेस को R_n द्वारा भी दर्शाया जाता है।

Subspace

A non-empty subset W of a vector space $V(F)$ is said to form a subspace of V if W is also a vector space over F with the same addition and scalar multiplication as for V .

सदिश स्थान $V(F)$ का एक गैर-रिक्त उपसमुच्चय W , V का उप-स्थान बनाता है यदि W भी F पर एक सदिश स्थान है जिसमें V के समान ही जोड़ और अदिश गुणन है।

Example-1

Let $W_1 = \{(a, 0, 0) : a \in R\}$ and $W_2 = \{(a, b, 0) : a, b \in R\}$. Here W_1 is a subspace of W_2 .

मान लीजिए $W_1 = \{(a, 0, 0) : a \in R\}$ और $W_2 = \{(a, b, 0) : a, b \in R\}$
यहाँ W_1, W_2 का उप-स्थान है।

Also W_1 and W_2 are subspaces of R^3 .

साथ ही W_1 और W_2, R^3 के उप-स्थान हैं।

Example-2

The entire space V and the zero space (also called Null space) $\{0\}$ are always subspaces of V and are called trivial subspaces or improper subspaces of V and all other subspaces, if any, are called proper subspaces.

संपूर्ण स्थान V और शून्य स्थान (जिसे शून्य स्थान भी कहा जाता है) $\{0\}$ हमेशा V के उप-स्थान होते हैं और उन्हें V के तुच्छ उप-स्थान या अनुचित उप-स्थान कहा जाता है और अन्य सभी उप-स्थान, यदि कोई हों, तो उचित उप-स्थान कहलाते हैं।

Properties OR Theorems on Vector Subspaces

- ① A non-empty subset W of a vector space $V(F)$ is a subspace of V iff W is closed under addition and scalar multiplication. i.e

सदिश समष्टि $V(F)$ का गैर-रिक्त उपसमुच्चय W , V का उपसमष्टि है यदि और केवल यदि W योग और अदिश गुणन के अंतर्गत बंद है। अर्थात्

$u + v \in W$ for all $u, v \in W$ (addition)

$au \in W$ for $u \in W$ and $a \in F$ (scalar multiplication)

2. A non-empty subset W of a vector space $V(F)$ is a subspace of V iff $au + v \in W$ for each $a \in F$ and $u, v \in W$.

सदिश समष्टि $V(F)$ का एक गैर-रिक्त उपसमूह W , V का एक उप-समष्टि है यदि और केवल यदि $au + v \in W$ प्रत्येक $a \in F$ और $u, v \in W$ के लिए हो।

3. A non-empty subset W of a vector space $V(F)$ is a subspace of V iff $u - v \in W$ for each $u, v \in W$ and $au \in W$ for $a \in F$ and $u \in W$.

सदिश समष्टि $V(F)$ का एक गैर-रिक्त उपसमूह W , V का एक उप-समष्टि है यदि और केवल यदि $u - v \in W$ प्रत्येक $u, v \in W$ के लिए हो और $au \in W$ $a \in F$ और $u \in W$ के लिए हो।

4. A non-empty subset W of a vector space $V(F)$ is a subspace of V iff $au + bv \in W$ for each $a, b \in F$ and $u, v \in W$.

सदिश समष्टि $V(F)$ का एक गैर-रिक्त उपसमूह W , V का एक उप-समष्टि है यदि और केवल यदि $au + bv \in W$ प्रत्येक $a, b \in F$ और $u, v \in W$ के लिए हो।

5. The intersection of any family of subspaces of a vector space $V(F)$ is a subspace of $V(F)$.

सदिश समष्टि $V(F)$ के उप-समष्टि के किसी भी परिवार का प्रतिच्छेदन $V(F)$ का एक उप-समष्टि है।

6. The intersection of two subspaces W_1 and W_2 of a vector space $V(F)$ is also a subspace of $V(F)$.

सदिश समष्टि $V(F)$ के दो उप-समष्टि W_1 और W_2 का प्रतिच्छेदन भी $V(F)$ का एक उप-समष्टि है।

7. The union of two subspaces W_1 and W_2 of a vector space $V(F)$ may not be a subspace of $V(F)$.

एक सदिश समष्टि $V(F)$ के दो उपसमष्टि W_1 और W_2 का संघ, $V(F)$ का उपसमष्टि नहीं हो सकता है।

8. The union of two subspaces is a subspace iff one is contained in the other.

दो उपसमष्टि का संघ उपसमष्टि होता है यदि और केवल यदि एक दूसरे में समाहित हो।

Example -3 Let R be the field of real numbers. Then check whether the subset $W = \{(x, 2y, 3z) : x, y, z \in R\}$ of V_3 is a subspace of $V_3(R)$ or not?

मान लीजिए R वास्तविक संख्याओं का क्षेत्र है। फिर जाँच करें कि V_3 का उपसमुच्चय $W = \{(x, 2y, 3z) : x, y, z \in R\}$ $V_3(R)$ का उपसमष्टि है या नहीं?

Example-4

Let R be the field of real numbers. Then check whether the subset $W = \{(x, y, z) : x, y, z \in Q\}$ of V_3 is a subspace of $V_3(R)$ or not?

मान लीजिए R वास्तविक संख्याओं का क्षेत्र है। फिर जाँच कीजिए कि V_3 का उपसमुच्चय $W = \{(x, y, z) : x, y, z \in Q\}$ $V_3(R)$ का उपसमष्टि है या नहीं?