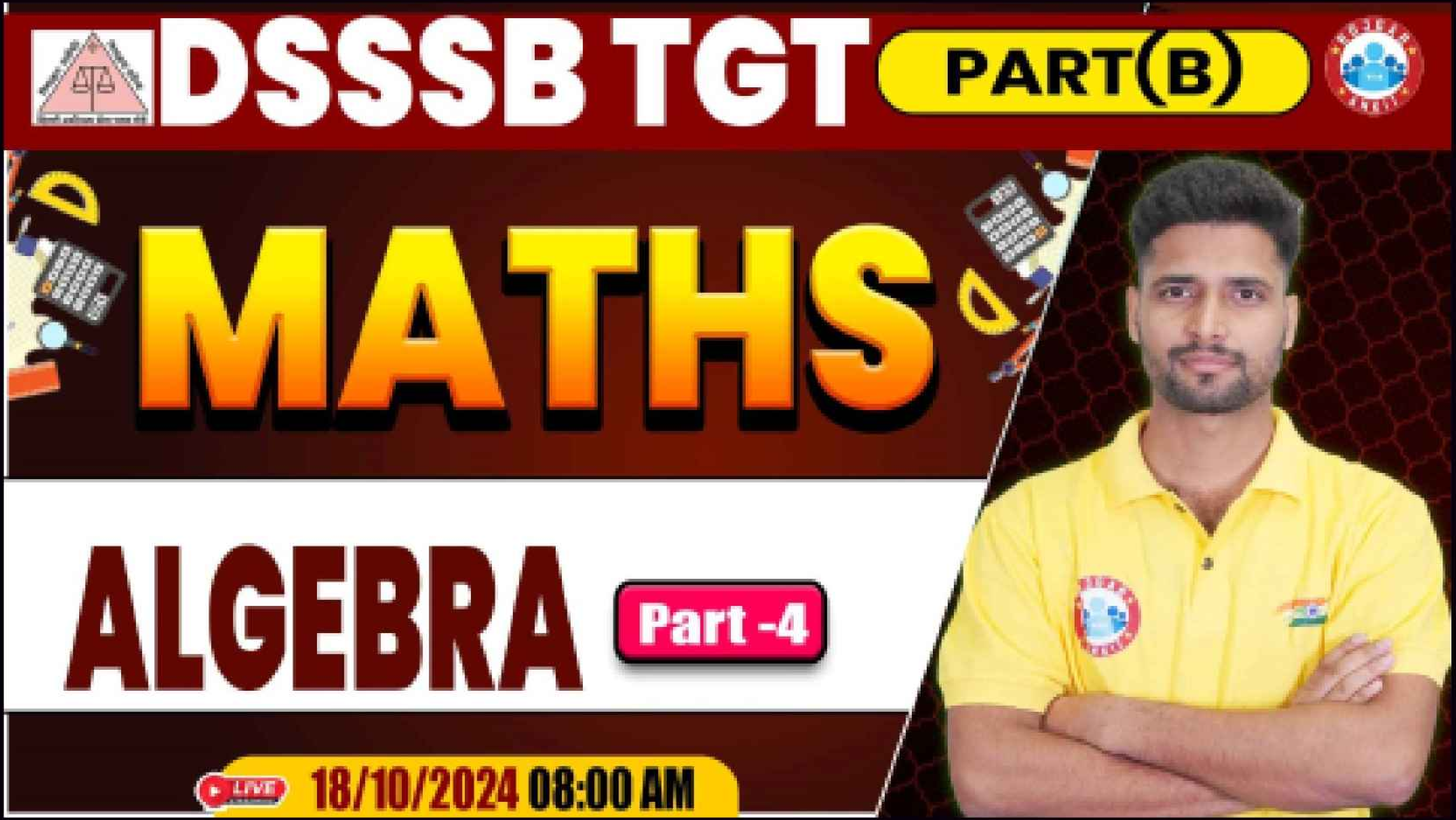
DSSSB TGT
PART(B)
MATHS
ALGEBRA
Part -4
LIVE
18/10/2024 08:00 AM

Introduction:-

In this Class -4, we will discuss the following Concepts

इस कक्षा-4 में हम निम्नलिखित अवधारणाओं पर चर्चा करेंगे

> Introduction of Matrix as a Vector

मैट्रिक्स का एक वेक्टर के रूप में परिचय

> Linear Dependence रैखिक निर्भरता

> Linear Independence रैखिक स्वतंत्रता

> Properties of Linear dependence and Independence

रैखिक निर्भरता और स्वतंत्रता के गुण

> Next, we will discuss Class -4

इसके बाद, हम कक्षा -4 पर चर्चा करेंगे

Introduction of Matrix as a Vector

As we know that a three dimensional vector $\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$ is also written as an ordered triplet (a_1, a_2, a_3) and vice - versa.

जैसा कि हम जानते हैं कि एक त्रि-आयामी वेक्टर $\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$ को एक क्रमबद्ध त्रिक (a_1, a_2, a_3) के रूप में भी लिखा जाता है और इसके विपरीत।

By generalization to this to n -dimension is an ordered n-triple $(a_1, a_2, a_3, \dots \dots a_n)$ which is called an n -dimensional vector.

इसका सामान्यीकरण करके n-आयाम एक क्रमबद्ध n-त्रिकोण $(a_1, a_2, a_3, \dots \dots a_n)$ है जिसे n-आयामी वेक्टर कहा जाता है।

Likewise, a Row matrix $X = [\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \dots \dots . \boldsymbol{a_n}]_{1\times n}$ **can be considered an** n**-dimensional vector and is written as** $X = (a_1, a_2, a_3, \dots a_n)$

इसी तरह, एक पंक्ति मैट्रिक्स $X = [\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \dots \dots . \boldsymbol{a_n}]_{1\times n}$ को एक n-आयामी वेक्टर माना जा सकता है और इसे $X = (a_1, a_2, a_3, \dots a_n)$) के रूप में लिखा जाता है

Similarly, a column matrix $X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$ is also an n –dimensional vector and is written as $(a_1, a_2, a_3, \dots a_n)$.

Linear Dependence

n-row matrices $X_1, X_2, X_3, \dots . X_n$ **each of type** $1 \times n$ **are said to be linearly dependent if there exists '** n **' scalars**

n-पंक्ति मैट्रिसेस $X_1, X_2, X_3, \dots . X_n$ **जिनमें से प्रत्येक 1×n प्रकार का है, को रैखिक रूप से आश्रित कहा जाता है यदि ' n ' स्केलर मौजूद हों**

$a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ **not all zero i.e at least one of** $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ **is non-zero such that**

$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 +, \dots + a_n X_n = 0$

Linear Independence

n-row matrices $X_1, X_2, X_3, \dots . X_n$ each of type $1 \times n$ are said to be linearly independent if there exists ' n ' scalars $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ such that the relation

n-पंक्ति मैट्रिसेस $X_1, X_2, X_3, \dots . X_n$ प्रत्येक 1×n प्रकार के होते हैं, उन्हें रैखिक रूप से स्वतंत्र कहा जाता है यदि ' n ' स्केलर $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ मौजूद हों जैसे कि संबंध

$a_1 \mathrm{X}_1 + a_2 \mathrm{X}_2 + a_3 \mathrm{X}_3 + \cdots + a_n \mathrm{X}_n = 0$ gives

$a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, \dots \dots \dots . a_n = 0$

Note:-

Similarly, we can define the Linear Dependence (L.D) and Linear Independence (L.I) of column matrices.

इसी प्रकार, हम कॉलम मैट्रिसेस की रैखिक निर्भरता (एल.डी) और रैखिक स्वतंत्रता (एल.आई) को परिभाषित कर सकते हैं।

Properties of Linear dependence and Linear Independence

1. If two vectors are linearly dependent, then one of them is the scalar multiple of the other.
   यदि दो सदिश रैखिक रूप से आश्रित हैं, तो उनमें से एक दूसरे का अदिश गुणक है।
2. If two vectors are linearly dependent, then one of them is the scalar multiple of the other.
   केवल शून्य सदिश वाला समुच्चय रैखिक रूप से आश्रित होता है।
3. A set containing only the zero vector is linearly dependent.
   केवल शून्येतर सदिश वाला समुच्चय रैखिक रूप से स्वतंत्र होता है।

4. A set containing only a non-zero vector is linearly independent.
रैखिक रूप से आश्रित समुच्चय का प्रत्येक सुपरसेट रैखिक रूप से आश्रित होता है।
5. Every superset of a linearly dependent set is the linearly dependent.
सदिश के रैखिक रूप से स्वतंत्र समुच्चय का प्रत्येक उप-समुच्चय रैखिक रूप से स्वतंत्र होता है।
6. Every sub-set of a linearly independent set of vector is linearly independent.
रैखिकतः स्वतंत्र सदिश समुच्चय का प्रत्येक उपसमुच्चय रैखिकतः स्वतंत्र होता है।

7. If vectors $X_1, X_2, X_3, \ldots \ldots X_n$ are linearly dependent, then atleast one of them may be written as a linear combination of the rest and vice-versa.

यदि सदिश $X_1, X_2, X_3, \ldots \ldots X_n$ रैखिकतः आश्रित हैं, तो उनमें से कम से कम एक को शेष के रैखिक संयोजन के रूप में लिखा जा सकता है और इसके विपरीत।

8. If the set of vectors $X_1, X_2, X_3, \ldots . X_n$ are linearly independent and the set of vectors $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \ldots . \mathrm{X}_n, \mathrm{Y}$ are linearly dependent, then Y is a linear combination of the vectors $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \ldots . \mathrm{X}_n$.
यदि सदिशों का समुच्चय $X_1, X_2, X_3, \ldots . X_n$ रैखिकतः स्वतंत्र है और सदिशों का समुच्चय $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \ldots . \mathrm{X}_n, \mathrm{Y}$ रैखिकतः आश्रित है, तो Y सदिशों $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \ldots . \mathrm{X}_n$ का एक रैखिक संयोजन है।

9. The n-vectors $X_1, X_2, X_3, \ldots . X_n$ are linearly dependent iff the Rank of the matrix $\mathrm{A} = [\mathrm{X}_1 \mathrm{X}_2 \mathrm{X}_3 \ldots \mathrm{X}_n]$ with given vectors as columns is less than n. i.e $\rho(A) < n$
n-सदिश $X_1, X_2, X_3, \ldots . X_n$ रैखिक रूप से आश्रित हैं यदि और केवल यदि दिए गए सदिशों को स्तंभ के रूप में लेकर मैट्रिक्स $\mathrm{A} = [\mathrm{X}_1 \mathrm{X}_2 \mathrm{X}_3 \ldots \mathrm{X}_n]$ की रैंक n से कम है। यानी $\rho(A) < n$

10. The n -vectors $X_1, X_2, X_3, \dots . X_n$ are linearly independent iff the Rank of the matrix $A = [X_1 X_2 X_3 \dots \dots X_n]$ with given vectors as columns is equal to n. i.e $\rho(A) = n$
11. The n -vectors $X_1, X_2, X_3, \dots . X_n$ are linearly dependent iff the matrix $A = [X_1 X_2 X_3 \dots . . X_n]$ with given vectors as columns is singular. i.e $|A| = 0$
12. A set containing only the zero vector is linearly dependent.
13. A set containing only a non-zero vector is linearly independent.
14. Every superset of a linearly dependent set is the linearly dependent.

15. Every sub-set of a linearly independent set of vector is linearly independent.
16. If vectors $X_1, X_2, X_3, \ldots \ldots X_n$ are linearly dependent, then atleast one of them may be written as a linear combination of the rest and vice-versa.
17. If the set of vectors $X_1, X_2, X_3, \ldots . X_n$ are linearly independent and the set of vectors $X_1, X_2, X_3, \ldots . X_n, Y$ are linearly dependent, then Y is a linear combination of the vectors $X_1, X_2, X_3, \ldots . X_n$.
18. The n-vectors $X_1, X_2, X_3, \ldots \ldots X_n$ are linearly dependent iff the Rank of the matrix $A = [X_1 X_2 X_3 \ldots X_n]$ with given vectors as columns is less than n. i.e $\rho(A) < n$

19. **The n -vectors** $X_1, X_2, X_3, \ldots. X_n$ **are linearly independent iff the Rank of the matrix** $A = [X_1 X_2 X_3 \ldots \ldots X_n]$ **with given vectors as columns is equal to** n**. i.e** $\rho(A) = n$

20. **The n -vectors** $X_1, X_2, X_3, \ldots. X_n$ **are linearly dependent iff the matrix** $A = [X_1 X_2 X_3 \ldots .. X_n]$ **with given vectors as columns is singular. i.e** $|A| = 0$

Example-1

Examine for linear independence or dependence of the set of vectors: $(1,3,2); (1,-7,-8); (2,1,-1)$

सदिशों के सेट की रैखिक स्वतंत्रता या निर्भरता की जांच करें: (1,3,2);(1,-7,-8);(2,1,-1)

Consider $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -7 & 1 \\ 2 & -8 & -1 \end{bmatrix}$

Here $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -7 & 1 \\ 2 & -8 & -1 \end{vmatrix}$

$$= 1(7+8) - 1(-3-2) + 2(-24+14)$$
$$= 15 + 5 - 20 = 0$$

Therefore $\text{Rank(A)} < 3$

Now we have atleast one non-zero minor of order 2 and which is $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -7 - 3 = -10 \neq 0$

अब हमारे पास क्रम 2 का कम से कम एक शून्येतर लघु है और जो है $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-7} \end{vmatrix} = \mathbf{-7 - 3 = -10 \neq 0}$

$\text{Rank }(A) = 2 <$ **number of vectors**

Hence the given set of vectors is linearly dependent.

अतः सदिशों का दिया गया समूह रैखिकतः आश्रित है।

Example-2

Examine for linear independence or dependence of the set of vectors: $(1,2,0); (0,3,1); (-1,0,1)$

सदिशों के सेट की रैखिक स्वतंत्रता या निर्भरता की जांच करें: (1,2,0);(0,3,1);(-1,0,1)

Consider $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Here $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$