DSSSB TGT

PART(B)

MATHS

ALGEBRA

Part -3

LIVE 17/10/2024 08:00 AM

Introduction:-

In this Class -4, we will discuss the following Concepts

इस कक्षा-4 में हम निम्नलिखित अवधारणाओं पर चर्चा करेंगे

> Introduction of Matrix as a Vector

मैट्रिक्स का एक वेक्टर के रूप में परिचय

> Linear Dependence रैखिक निर्भरता

> Linear Independence रैखिक स्वतंत्रता

> Properties of Linear dependence and Independence

रैखिक निर्भरता और स्वतंत्रता के गुण

> Next, we will discuss Class -4

इसके बाद, हम कक्षा -4 पर चर्चा करेंगे

Introduction of Matrix as a Vector

As we know that a three dimensional vector $\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$ is also written as an ordered triplet (a_1, a_2, a_3) and vice - versa.

जैसा कि हम जानते हैं कि एक त्रि-आयामी वेक्टर $\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$ को एक क्रमबद्ध त्रिक (a_1, a_2, a_3) के रूप में भी लिखा जाता है और इसके विपरीत।

By generalization to this to n -dimension is an ordered n-triple $(a_1, a_2, a_3, \ldots \ldots a_n)$ which is called an n -dimensional vector.

इसका सामान्यीकरण करके n-आयाम एक क्रमबद्ध n-त्रिकोण $(a_1, a_2, a_3, \dots \dots a_n)$ है जिसे n-आयामी वेक्टर कहा जाता है।

Likewise, a Row matrix $X = [a_1, a_2, a_3, \dots \dots . a_n]_{1\times n}$ can be considered an n-dimensional vector and is written as $X = (a_1, a_2, a_3, \dots a_n)$

इसी तरह, एक पंक्ति मैट्रिक्स $X = [a_1, a_2, a_3, \dots \dots . a_n]_{1\times n}$ को एक n-आयामी वेक्टर माना जा सकता है और इसे $X = (a_1, a_2, a_3, \dots a_n)$) के रूप में लिखा जाता है

Similarly, a column matrix $X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$ is also an n –dimensional vector and is written as $(a_1, a_2, a_3, \dots a_n)$.

Linear Dependence

n-row matrices $X_1, X_2, X_3, \ldots . X_n$ each of type $1 \times n$ are said to be linearly dependent if there exists ' n ' scalars

n-पंक्ति मैट्रिसेस $X_1, X_2, X_3, \ldots . X_n$ जिनमें से प्रत्येक 1×n प्रकार का है, को रैखिक रूप से आश्रित कहा जाता है यदि ' n ' स्केलर मौजूद हों

$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ not all zero i.e at least one of $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ is non-zero such that

$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 +, \ldots + a_n X_n = 0$

null matrix

Linear Independence

n-row matrices $X_1, X_2, X_3, \ldots . X_n$ **each of type** $1 \times n$ **are said to be linearly independent if there exists '** n **' scalars** $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ **such that the relation ,**

n-पंक्ति मैट्रिसेस $X_1, X_2, X_3, \ldots . X_n$ **प्रत्येक 1×n प्रकार के होते हैं, उन्हें रैखिक रूप से स्वतंत्र कहा जाता है यदि ' n ' स्केलर** $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ **मौजूद हों जैसे कि संबंध**

$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \cdots + a_n X_n = 0$ **gives**

$$\boxed{a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, \ldots \ldots \ldots . . a_n = 0}$$

all scalar zero

Note:-

Similarly, we can define the Linear Dependence (L.D) and Linear Independence (L.I) of column matrices.

इसी प्रकार, हम कॉलम मैट्रिसेस की रैखिक निर्भरता (एल.डी) और रैखिक स्वतंत्रता (एल.आई) को परिभाषित कर सकते हैं।

Properties of Linear dependence and Linear Independence

1. If two vectors are linearly dependent, then one of them is the scalar multiple of the other.
यदि दो सदिश रैखिक रूप से आश्रित हैं, तो उनमें से एक दूसरे का अदिश गुणक है।

2. A set containing only the zero vector is linearly dependent
केवल शून्य सदिश वाला समुच्चय रैखिक रूप से आश्रित होता है।

3. A set containing only the non zero vector is linearly independent.
केवल शून्येतर सदिश वाला समुच्चय रैखिक रूप से स्वतंत्र होता है।

4. A set containing only a non-zero vector is linearly independent.
रैखिक रूप से आश्रित समुच्चय का प्रत्येक सुपरसेट रैखिक रूप से आश्रित होता है।

5. Every superset of a linearly dependent set is the linearly dependent.
सदिश के रैखिक रूप से स्वतंत्र समुच्चय का प्रत्येक उप-समुच्चय रैखिक रूप से स्वतंत्र होता है।

6. Every sub-set of a linearly independent set of vector is linearly independent.
रैखिकतः स्वतंत्र सदिश समुच्चय का प्रत्येक उपसमुच्चय रैखिकतः स्वतंत्र होता है।

7. **If vectors $X_1, X_2, X_3, \ldots \ldots X_n$ are linearly dependent, then atleast one of them may be written as a linear combination of the rest and vice-versa.**

यदि सदिश $X_1, X_2, X_3, \ldots \ldots X_n$ रैखिकतः आश्रित हैं, तो उनमें से कम से कम एक को शेष के रैखिक संयोजन के रूप में लिखा जा सकता है और इसके विपरीत।

$a_1, a_2, a_3 \ldots \ldots a_n$

$$\boxed{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots \ldots a_n x_n = 0}$$

8. **If the set of vectors $X_1, X_2, X_3, \ldots . X_n$ are linearly independent and the set of vectors $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \ldots . \mathrm{X}_n, \mathrm{Y}$ are linearly dependent, then Y is a linear combination of the vectors $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \ldots . \mathrm{X}_n$.**

   यदि सदिशों का समुच्चय $X_1, X_2, X_3, \ldots . X_n$ रैखिकतः स्वतंत्र है और सदिशों का समुच्चय $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \ldots . \mathrm{X}_n, \mathrm{Y}$ रैखिकतः आश्रित है, तो Y सदिशों $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \ldots . \mathrm{X}_n$ का एक रैखिक संयोजन है।

9. **The n-vectors $X_1, X_2, X_3, \ldots . . X_n$ are linearly dependent iff the Rank of the matrix $\mathrm{A} = [\mathrm{X}_1 \mathrm{X}_2 \mathrm{X}_3 \ldots \mathrm{X}_n]$ with given vectors as columns is less than n. i.e $\rho(A) < n$**

   n-सदिश $X_1, X_2, X_3, \ldots . . X_n$ रैखिक रूप से आश्रित हैं यदि और केवल यदि दिए गए सदिशों को स्तंभ के रूप में लेकर मैट्रिक्स $\mathrm{A} = [\mathrm{X}_1 \mathrm{X}_2 \mathrm{X}_3 \ldots \mathrm{X}_n]$ की रैंक n से कम है। यानी $\rho(A) < n$

$|A| \neq 0.$

10. The n -vectors $X_1, X_2, X_3, \dots . X_n$ are linearly independent iff the Rank of the matrix $A = [X_1 X_2 X_3 \dots \dots X_n]$ with given vectors as columns is equal to n. i.e $\rho(A) = n$
11. The n -vectors $X_1, X_2, X_3, \dots . X_n$ are linearly dependent iff the matrix $A = [X_1 X_2 X_3 \dots . . X_n]$ with given vectors as columns is singular. i.e $|A| = 0$
12. A set containing only the zero vector is linearly dependent.
13. A set containing only a non-zero vector is linearly independent.
14. Every superset of a linearly dependent set is the linearly dependent.

Example-1

Examine for linear independence or dependence of the set of vectors: $(1,3,2); (1,-7,-8); (2,1,-1)$

सदिशों के सेट की रैखिक स्वतंत्रता या निर्भरता की जांच करें: (1,3,2);(1,-7,-8);(2,1,-1)

Consider $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -7 & 1 \\ 2 & -8 & -1 \end{bmatrix}$

Here $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -7 & 1 \\ 2 & -8 & -1 \end{vmatrix}$

$$= 1(7+8) - 1(-3-2) + 2(-24+14)$$
$$= 15 + 5 - 20 = 0$$

Therefore $\text{Rank}(A) < 3$

Now we have atleast one non-zero minor of order 2 and which is $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -7 - 3 = \boxed{-10 \neq 0}$

अब हमारे पास क्रम 2 का कम से कम एक शून्येतर लघु है और जो है

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-7} \end{vmatrix} = \mathbf{-7 - 3 = -10 \neq 0}$$

$\boxed{\text{Rank}\,(A) = 2} <$ **number of vectors**

Hence the given set of vectors is linearly dependent.

अतः सदिशों का दिया गया समूह रैखिकतः आश्रित है।

Example-2

Examine for linear independence or dependence of the set of vectors: $(1,2,0); (0,3,1); (-1,0,1)$

सदिशों के सेट की रैखिक स्वतंत्रता या निर्भरता की जांच करें: (1,2,0);(0,3,1);(-1,0,1)

Consider $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Here $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 1(3-0) - 0(2-0) - 1(2-0)$$
$$= 3 - 2 = \boxed{1 \neq 0}$$

Therefore $\text{Rank}\,(A) = 3$ **= number of vectors**

इसलिए रैंक (A) = 3 = वैक्टर की संख्या

Hence the given set of vectors is linearly independent.

इसलिए वैक्टर का दिया गया सेट रैखिक रूप से स्वतंत्र है।

Introduction:-

In this Class-5, we will discuss the following Concepts

इस कक्षा-5 में हम निम्नलिखित अवधारणाओं पर चर्चा करेंगे

> **Characteristic Matrix**

> **Characteristic Polynomial**

> **Characteristic Equation**

> **Characteristic roots or Eigen values**

> **Spectrum**

> **Eigen vector or Characteristic vector or Latent vector**

> **Some Important Results**

> **Next, we will discuss Class – 6**

Characteristic Matrix

Let A be a square matrix of order n and λ be some scalar. Then the matrix of the form

मान लीजिए A क्रम n का एक वर्ग मैट्रिक्स है और λ कुछ अदिश है। तब फ़ॉर्म का मैट्रिक्स

$$A-\lambda \mathrm{I}=\begin{bmatrix} a_{11-\lambda} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22-\lambda} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn-\lambda} \end{bmatrix}$$

is called the characteristic matrix of A, where I is an identity matrix of order ' n '.

को A का अभिलक्षणिक मैट्रिक्स कहा जाता है, जहाँ I क्रम 'n' का एक पहचान मैट्रिक्स है।

Characteristic Polynomial

Let A be a square matrix of order n and λ be some scalar. Then the determinant

मान लीजिए A को n क्रम का एक वर्ग मैट्रिक्स माना जाता है और λ कुछ अदिश है। तब निर्धारक

$$|A-\lambda \mathrm{I}| = \begin{vmatrix} a_{11-\lambda} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22-\lambda} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn-\lambda} \end{vmatrix}$$

When expanded gives a polynomial $\phi(\lambda)$ of degree ' n ' in λ and is called the characteristic polynomial (or function) of the matrix A.

जब विस्तारित किया जाता है तो λ में डिग्री 'n' का एक बहुपद ϕ(λ) देता है और इसे मैट्रिक्स A का अभिलक्षणिक बहुपद (या फ़ंक्शन) कहा जाता है।

Characteristic Equation

Let A be a square matrix of order n and λ be some scalar. Then the equation $\boxed{|A - \lambda I| = 0}$ is called the characteristic equation of matrix A.

मान लीजिए A कोटि n का एक वर्ग मैट्रिक्स है और λ कुछ अदिश है। तब समीकरण $|A-\lambda I|=0$ को मैट्रिक्स A का अभिलक्षणिक समीकरण कहा जाता है।

Shortcut Method to find Characteristic Equation

Sum of diagonal elements.

1. If A is a square matrix of order 2, then characteristic equation is given by $\boxed{\lambda^2 - (\text{ Trace of A})\lambda + |A| = 0}$, where trace of A is the sum of diagonal elements of matrix A.
   यदि A क्रम 2 का एक वर्ग मैट्रिक्स है, तो विशेषता समीकरण λ^2-(A का ट्रेस)λ+|A|=0 द्वारा दिया जाता है, जहाँ A का ट्रेस मैट्रिक्स A के विकर्ण तत्वों का योग है।
2. If A is a square matrix of order 3, then characteristic equation is given by $\boxed{\lambda^3 - (\text{ Trace of A})\lambda^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})\lambda - |A| = 0}$
   यदि A क्रम 3 का एक वर्ग मैट्रिक्स है, तो विशेषता समीकरण $\lambda^3 - (\text{ Trace of A})\lambda^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})\lambda - |A| = 0$ द्वारा दिया जाता है

Where A_{11}, A_{22}, A_{33} are the co-factors of the diagonal elements in A.

जहाँ A_{11}, A_{22}, A_{33} A में विकर्ण तत्वों के सह-कारक हैं।

$A_{ij} \Rightarrow (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Characteristic Roots or Eigen Values

Let A be a square matrix of order n and λ be some scalar. Then the roots of the characteristic equation $|A - \lambda I| = 0 (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..$ say $)$ are called the characteristic roots or latent roots or eigen values or proper values.

मान लीजिए A को n क्रम का एक वर्ग मैट्रिक्स है और λ कुछ अदिश है। तब अभिलक्षणिक समीकरण $|A - \lambda I| = 0 (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..$ मान लीजिए) के मूलों को अभिलक्षणिक मूल या अव्यक्त मूल या आइगेन मान या उचित मान कहा जाता है।

Spectrum

The set of characteristic roots of a matrix A is called the spectrum of matrix A.

मैट्रिक्स A के अभिलक्षणिक मूलों के समूह को मैट्रिक्स A का स्पेक्ट्रम कहा जाता है।

Characteristic vector or Eigen vector

If λ is a characteristic roots of an n-square matrix A, then a non-zero vector X satisfying the equation $AX = \lambda X$ is called a characteristic vector of A.

यदि λ एक n-वर्ग मैट्रिक्स A का अभिलक्षणिक मूल है, तो समीकरण AX=λX को संतुष्ट करने वाला शून्येतर सदिश X, A का अभिलक्षणिक सदिश कहलाता है।

The characteristic vector of matrix A is also called eigen vector or latent vector of matrix A.

मैट्रिक्स A के अभिलक्षणिक सदिश को मैट्रिक्स A का आइगेनवेक्टर और लेटेंट सदिश भी कहा जाता है।

Some Important Results / Properties OR Theorems.

1. A characteristic vector X of a matrix A cannot correspond to more than one characteristic root of A.

मैट्रिक्स A का एक अभिलक्षणिक सदिश X, A के एक से अधिक अभिलक्षणिक मूल के अनुरूप नहीं हो सकता।

2. If X is a characteristic vector of a square matrix A corresponding to the characteristic root λ, then kX is also a characteristic vector of A corresponding to the same characteristic root λ, where k is any non-zero scalar.

यदि X एक वर्ग आव्यूह A का एक अभिलक्षणिक सदिश है जो अभिलक्षणिक मूल λ के संगत है, तो kX भी उसी अभिलक्षणिक मूल λ के संगत A का एक अभिलक्षणिक सदिश है, जहाँ k कोई भी शून्येतर अदिश है।

3. The product of the characteristic roots of a square matrix of order n is equal to the determinant of the matrix.

क्रम n वाले वर्ग मैट्रिक्स के अभिलक्षणिक मूलों का गुणनफल मैट्रिक्स के निर्धारक के बराबर होता है।

4. Sum of eigen values of a square matrix = Trace of the square matrix.

वर्ग मैट्रिक्स के आइगेन मानों का योग = वर्ग मैट्रिक्स का ट्रेस।

5. A square matrix A and its transpose A' have same eigen values.

एक वर्ग मैट्रिक्स A और इसके ट्रांसपोज़ A^' के आइगेन मान समान हैं।

6. The matrix A and $B^{-1}AB$ have the same eigen roots, where B is an invertible matrix of the same order as A.

मैट्रिक्स A और $B^{-1}AB$ के समान आइगेन मूल हैं, जहाँ B, A के समान क्रम का एक व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स है।

7. If λ is an eigen value of a non-singular matrix A, then $\frac{1}{\lambda}$ is the eigen value of A^{-1}.

यदि λ एक गैर-विलक्षण मैट्रिक्स A का आइजेन मान है, तो $\frac{1}{\lambda}A^{-1}$ का आइजेन मान है।

8. The eigen values of a real symmetric matrix are all real.

एक वास्तविक सममित मैट्रिक्स के सभी आइगेन मान वास्तविक होते हैं।

9. The eigen values of a Hermitian matrix are all real.

एक हर्मिटियन मैट्रिक्स के सभी आइगेन मान वास्तविक होते हैं।

10. The eigen values of a Skew-Hermitian matrix are either zero or purely imaginary.

तिरछा-हर्मिटियन मैट्रिक्स के आइगेन मान या तो शून्य या पूरी तरह से काल्पनिक होते हैं।

11. The eigen values of a diagonal matrix are the diagonal elements of the matrix.

विकर्ण मैट्रिक्स के आइगेन मान मैट्रिक्स के विकर्ण तत्व होते हैं।

12. The eigen values of a triangular matrix are the diagonal elements of the matrix.

त्रिभुजाकार मैट्रिक्स के आइगेन मान मैट्रिक्स के विकर्ण तत्व होते हैं।

13. If λ is an eigen value of a non-singular matrix A, then $\frac{|A|}{\lambda}$ is the eigen value of $adj. A$.

यदि λ एक गैर-एकवचन मैट्रिक्स A का आइगेन मान है, तो $\frac{|A|}{\lambda} adj. A$ का आइगेन मान है।

14. If $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots . \lambda_n$ are distinct characteristic roots of a matrix A and if $X_1, X_2, X_3, \ldots . X_n$ are nonzero characteristic vectors associated with these roots, then $X_1, X_2, X_3, \ldots . X_n$ are linearly independent.

यदि $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots . \lambda_n$ मैट्रिक्स A के अलग-अलग अभिलक्षणिक मूल हैं और यदि $X_1, X_2, X_3, \ldots . X_n$ इन मूलों से जुड़े शून्येतर अभिलक्षणिक सदिश हैं, तो $X_1, X_2, X_3, \ldots . X_n$ रैखिक रूप से स्वतंत्र हैं।

Example:- Find eigen values and eigen vectors

Let $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$, then characteristic equation of the matrix A is given by $|A - \lambda \mathrm{I}| = 0$

मान लें $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$, तो मैट्रिक्स A का अभिलक्षणिक समीकरण $|A - \lambda I| = 0$ द्वारा दिया गया है

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 8-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

On solving we get,

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 45\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - 18\lambda + 45) = 0$$

$$\lambda(\lambda - 3)(\lambda - 15) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0,3,15$$

Hence the characteristic roots of A **are** $0,3,15$.

अतः A के अभिलक्षणिक मूल 0,3,15 हैं।

Characteristic vectors of A **are non-zero solutions of** $(A-\lambda\mathrm{I})\mathrm{X}=0$. **i.e** $\begin{bmatrix} 8-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$

A **के अभिलक्षणिक सदिश** $(A-\lambda I)X=0$ **के शून्येतर समाधान हैं। अर्थात**

$$\begin{bmatrix} 8-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$$

Now, we shall find the eigen vector for $\lambda=0$

अब, हम λ=0 के लिए आइगेन वेक्टर ज्ञात करेंगे

Put $\lambda=0$ **in (i), we get**

(i) में λ=0 रखने पर, हमें मिलता है

$$\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$8x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0$$
$$-6x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 0$$
$$2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0$$

By shortcut method

$$\frac{x_1}{24-14} = \frac{x_2}{-12+32} = \frac{x_3}{56-36}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{10} = \frac{x_2}{20} = \frac{x_3}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{2} = k(\textbf{ say }) \Rightarrow x_1 = k; x_1 = 2k; x_1 = 2k$$

$$\Rightarrow \mathrm{X} = \begin{bmatrix} k \\ 2k \\ 2k \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{X} = k\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Similarly, we can find other eigen vectors for $\lambda = 3$ and $\lambda = 15$.

इसी प्रकार, हम λ=3 और λ=15 के लिए अन्य आइगेन वैक्टर पा सकते हैं।

Introduction:-

In this Class -6 , we will discuss the following Concepts

इस कक्षा-6 में हम निम्नलिखित अवधारणाओं पर चर्चा करेंगे

> Matrix polynomial
> Scalar matrix polynomial
> Cayley - Hamilton Theorem
> Monic Polynomial and Annihilating polynomial
> Minimal polynomial & Minimal Equation of a Matrix
> Derogatory & Non-Derogatory Matrices
> Some Important Results
> Next, we will discuss Exercise - 31.2 in Class – 7

Matrix Polynomial

An expression of the form

रूप की अभिव्यक्ति

$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + A_{n-2} x^{n-2} + \cdots + A_1 x + A_0$ **in which** $A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, \dots . A_1, A_0$ **are all square matrices of same order, is called matrix polynomial of degree '** n **' if** $A_n \neq 0$**.**

जिसमें $A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, \dots . A_1, A_0$ **सभी समान क्रम के वर्ग आव्यूह हैं, उसे 'n' घात का आव्यूह बहुपद कहा जाता है, यदि A_n≠0 हो।**

Note:- Two matrix polynomials are equal iff the coefficients of like powers of x are same.

नोटः- दो आव्यूह बहुपद बराबर होते हैं यदि x की समान घातों के गुणांक समान हों।

Scalar Matrix Polynomial

If the coefficients of a matrix polynomial are all scalar matrices then the matrix polynomial is said to be a scalar matrix polynomial.

यदि किसी आव्यूह बहुपद के सभी गुणांक अदिश आव्यूह हों तो आव्यूह बहुपद को अदिश आव्यूह बहुपद कहा जाता है।

Cayley - Hamilton Theorem

Every square matrix satisfies its characteristic equation. i.e

प्रत्येक वर्ग मैट्रिक्स अपने अभिलक्षणिक समीकरण को संतुष्ट करता है।

If $|A-\lambda \mathrm{I}| = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ **is the characteristic equation of an n -square matrix A , then** $a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_0\mathrm{I} = 0$.

यदि $|A-\lambda I| = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ **एक** $n-$ **वर्ग मैट्रिक्स** A **का अभिलक्षणिक समीकरण है, तो** $a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_0I = 0$.

Monic Polynomial

A polynomial in x in which the coefficients of the highest power of x is unity is called a monic polynomial.

x में एक बहुपद जिसमें x की उच्चतम घात का गुणांक एक होता है, एक मोनिक बहुपद कहलाता है।

For Example:- $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 7$

Here coefficient of x^3 is 1 .

Note:- The coefficient of the highest power of x is known as the leading coefficient of the polynomial.

नोट:- x की उच्चतम घात का गुणांक बहुपद का अग्रणी गुणांक कहलाता है।

Annihilating Polynomial

Let $f(x)$ be a polynomial and A be any square matrix, if $f(A) = 0$, then we say that the polynomial $f(x)$ annihilates the matrix A and this polynomial is called annihilating polynomial.

मान लीजिए f(x) एक बहुपद है और A कोई वर्ग आव्यूह है, यदि f(A)=0 है, तो हम कहते हैं कि बहुपद f(x) आव्यूह A को नष्ट कर देता है और इस बहुपद को नष्ट करने वाला बहुपद कहा जाता है।

Note:-

The characteristic polynomial of a square matrix A is nonzero annihilating polynomial that annihilates A.

वर्ग मैट्रिक्स A का अभिलक्षणिक बहुपद शून्येतर विलोपन बहुपद है जो A को विलोपन करता है।

Minimal Polynomial and Minimal Equation of a Matrix

If $f(x)$ is a polynomial of the lowest degree with leading coefficient unity such that $f(A) = 0$, then the polynomial $f(x)$ is called the minimal polynomial of the matrix A and the equation $f(x) = 0$ is called the minimal equation of the matrix A.

यदि f(x) अग्रणी गुणांक एकता के साथ सबसे कम डिग्री का एक बहुपद है जैसे कि f(A)=0, तो बहुपद f(x) को मैट्रिक्स A का न्यूनतम बहुपद कहा जाता है और समीकरण f(x)=0 को मैट्रिक्स A का न्यूनतम समीकरण कहा जाता है।

Note:-

The degree of the minimal equation of an n-square matrix is always less than or equal to that of characteristic equation which is n.

n-वर्ग मैट्रिक्स के न्यूनतम समीकरण की डिग्री हमेशा विशेषता समीकरण जो कि n है, से कम या बराबर होती है।

Derogatory and Non-Derogatory Matrices

The n-square matrix is said to be derogatory if the degree of its minimal equation is less than n.

And the n-square matrix is said to be non-derogatory if the degree of its minimal equation is equal to n.

एन-स्क्वायर मैट्रिक्स को अपमानजनक कहा जाता है यदि इसके न्यूनतम समीकरण की डिग्री n से कम है। और एन-स्क्वायर मैट्रिक्स को गैर-अपमानजनक कहा जाता है यदि इसके न्यूनतम समीकरण की डिग्री n के बराबर है।

Note:-

A matrix is non-derogatory if the degree of its minimal polynomial is equal to the degree of its characteristic polynomial.

एक मैट्रिक्स गैर-अपमानजनक है यदि उसके न्यूनतम बहुपद की डिग्री उसके विशेषता बहुपद की डिग्री के बराबर है।

Some Important Results:-

1. If A be a square matrix of order n, then adj. $(A - \lambda I)$ is a matrix polynomial of degree at the most $(n-1)$.
2. The distinct roots of the characteristic equation $\phi(\lambda) = 0$ of a matrix A are also the distinct roots of the minimal equation $m(\lambda) = 0$ of A and conversely.
3. If the eigen values of an n-square matrix are all different, then its minimal equation is also of nth degree.
4. If $\phi(\lambda)$ is the characteristic polynomial and $m(\lambda)$ is the minimal polynomial then $\phi(\lambda) = (-1)^n m(\lambda)$.

5. If the roots of the characteristic equation of a square matrix are all distinct, then the matrix is nonderogatory.
6. A square matrix A is scalar iff its minimal polynomial is of degree one.
7. Every Identity matrix of order $n \geq 2$ is derogatory.

Example - 1 **Find the minimal equation of matrix** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ **and show that A is non-derogatory.**

The characteristic equation of A is given by $|A - \lambda I| = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -4-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(-4-\lambda)(7-\lambda) = 0$$

On solving we get $\lambda = 1, -4, 7$

Eigen roots of A **are** $1, -4, 7$.

Here eigen roots of matrix A are all distinct.

Thus, characteristic equation and minimal equation are of same degree and both have same roots.

Hence, the minimal equation of A is $(x-1)(x+4)(x-7)=0$

As degree of minimal polynomial is 3 , which is equal to order of matrix A.

Hence matrix A is non-derogatory.

Example-2 Find the minimal equation of matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$ and show that A is derogatory.

The characteristic equation of A is given by $|A - \lambda I| = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

On solving we get

$$(\lambda - 2)^2(\lambda - 1) = 0$$

$\lambda = 2,2,1$ **are the characteristic roots of A .**

We know that each characteristic root of A **is also a root of its minimal equation.**

Let $m(x) = (x-2)(x-1) = x^2 - 3x + 2$

Now we shall check, whether $m(x)$ **is the minimal polynomial of A or not.**

Now $A^2 = \begin{bmatrix} 13 & -18 & -18 \\ -3 & 10 & 6 \\ 9 & -18 & -14 \end{bmatrix}$

$\therefore A^2 - 3A + 2\mathrm{I} =$

$$\begin{bmatrix} 13 & -18 & -18 \\ -3 & 10 & 6 \\ 9 & -18 & -14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & 18 & 18 \\ 3 & -12 & -6 \\ -9 & 18 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Thus matrix A satisfies the equation $x^2 - 3x + 2 = 0$

Hence $m(x) = x^2 - 3x + 2$ **is the minimal polynomial of A.**

Since its degree is less than the order of A.

Hence matrix A is derogatory.