DSSSB TGT PART(B)

MATHS

ALGEBRA Part -2

LIVE 16/10/2024 08:00 AM

Echelon form OR Triangular form of a Matrix

Let A be any matrix of order mxn, then matrix A is said to be in Echelon form if the following conditions are satisfied:

मान लीजिए A को mxn क्रम का कोई भी मैट्रिक्स माना जाता है, तो मैट्रिक्स A को सोपानक रूप में कहा जाता है, यदि निम्नलिखित स्थितियाँ संतुष्ट होती हैं:

1. The first non-zero elements in each non-zero row is unity which is called the leading entry of the row.

प्रत्येक गैर-शून्य पंक्ति में पहला गैर-शून्य तत्व एकता है जिसे पंक्ति की अग्रणी प्रविष्टि कहा जाता है।

2. All the non-zero rows, precede the zero rows, if any.
सभी गैर-शून्य पंक्तियाँ, शून्य पंक्तियों से पहले होती हैं, यदि कोई हो।

3. The number of zeros before the leading entry in each row is less than the number of such zero's in the succeeding rows.
प्रत्येक पंक्ति में अग्रणी प्रविष्टि से पहले शून्यों की संख्या बाद की पंक्तियों में ऐसे शून्यों की संख्या से कम है।

Rank of Matrix by Echelon Form Method

The Rank of a matrix in echelon form is equal to the number of non-zero's rows of the matrix.

इकेलॉन फॉर्म में मैट्रिक्स की रैंक मैट्रिक्स की गैर-शून्य पंक्तियों की संख्या के बराबर होती है।

For Example:-

Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Operating $R_2 \to R_2 - 2R_1$ **and** $R_3 \to R_3 - R_1$**, we get**

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Operating $R_2 \to -1R_2$**, we get**

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow R_2 \\ \leftarrow R_3 \end{matrix}$$

Operating $R_3 \to R_3 - R_2$, we get

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Thus, number of non-zero rows $= 2$

Hence Rank of Matrix A $= 2$

Normal form or Canonical form of a Matrix

Every non-zero matrix of order $m \times n$ can be reduced by means of elementary row and column operations into equivalent matrix of any of the following forms:

क्रम m×n के प्रत्येक गैर-शून्य मैट्रिक्स को प्राथमिक पंक्ति और स्तंभ संचालन के माध्यम से निम्नलिखित में से किसी भी रूप के समतुल्य मैट्रिक्स में घटाया जा सकता है:

(i) $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}$

(iii) $[I_r \quad 0]$

(iv) I_r

Where I_r is the identity matrix of order ' r ' and ' O ' represents zero matrix of any order which is called its normal form or canonical form.

जहाँ I_r क्रम 'r' का पहचान मैट्रिक्स है और 'O' किसी भी क्रम के शून्य मैट्रिक्स को दर्शाता है जिसे इसका सामान्य रूप या विहित रूप कहा जाता है।

Rank of Matrix by Normal form Method

The Rank of an $m \times n$ matrix A is ' r ' if and only if it can be reduced to the form $\begin{bmatrix} \mathrm{I_r} & \mathrm{0} \\ \mathrm{0} & \mathrm{0} \end{bmatrix}$ by a finite chain of elementary operations.

m×n मैट्रिक्स A की रैंक 'r' है यदि और केवल यदि इसे प्राथमिक संचालन की एक परिमित श्रृंखला द्वारा $\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ रूप में कम किया जा सकता है।

Working Rule to Find Rank of Matrix by Normal form

(i) Interchange rows or column to obtain a nonzero element in first row and first column of the given matrix.

दिए गए मैट्रिक्स की पहली पंक्ति और पहले कॉलम में शून्येतर तत्व प्राप्त करने के लिए पंक्तियों या कॉलम को आपस में बदलें।

(ii) If this non-zero element is not 1, then make it 1.

यदि यह शून्येतर तत्व 1 नहीं है, तो इसे 1 बना दें।

(iii) Obtain zeros in the remainder of first row and first column.

पहली पंक्ति और पहले कॉलम के शेष में शून्य प्राप्त करें।

(iv) Repeat the above three steps starting with element in second row and second column.

दूसरी पंक्ति और दूसरे कॉलम में तत्व से शुरू करते हुए उपरोक्त तीन चरणों को दोहराएँ।

(v) Continue the procedure down the main diagonal either until the end of the diagonal is reached or all the elements which are zero.

प्रक्रिया को मुख्य विकर्ण के नीचे तब तक जारी रखें जब तक कि विकर्ण के अंत तक न पहुँच जाएँ या सभी तत्व जो शून्य हैं।

For Example:-

Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 4 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Operating following operations, we get

$C_2 \to C_2 - 2C_1; C_3 \to C_3 + C_1; C_4 \to C_4 - 3C_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Operating $C_3 \to C_3 + 2C_4; C_4 \to (-1)C_4$**, we get**

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Now operating $R_2 \to R_2 + 2R_1; R_3 \to R_3 - R_1$, we get

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operating $C_2 \leftrightarrow C_4$, we get

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} I_2 & : & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$R_3 - R_2$

Which is the normal form of the given matrix

Hence Rank of Matrix A = 2

Properties of Rank of Matrices

1. $\text{Rank}\,(A) = \text{Rank}\,(A^T) = \text{Rank}\,(AA^T) = \text{Rank}\,(A^TA)$
2. **Let** A **be a non-zero matrix of order** $\text{m}x\text{k}$ **and B be a non-zero matrix of order** $\text{k}x\text{n}$**, then** $\text{Rank}\,(AB) \leq \min\{\text{rank}\,(A), \text{rank}\,(B)\}$
3. **If** A **and** B **be two square matrices of same order and** A **is non-singular, then** $\text{Rank}\,(AB) = \text{Rank}\,(B)$.
4. **If** A **and** B **be two square matrices of same order and** B **is non-singular, then** $\text{Rank}\,(AB) = \text{Rank}\,(A)$.
5. **If** A **and** B **be two matrices of same order, then** $\text{Rank}\,(A + B) \leq \text{Rank}\,(A) + \text{Rank}\,(B)$

6. If A and B be two matrices of same order, then $\text{Rank}\,(A-B) \geq \text{Rank}\,(A) - \text{Rank}\,(B)$

7. The rank of real skew-symmetric matrix cannot be 1 .

8. If the rank of real symmetric matrix be 1 , then the diagonal elements of the matrix cannot be all zero.

9. If A and B are two n-rowed square matrices, then $\text{Rank}\,(AB) \geq \text{Rank}\,(A) + \text{Rank}\,(B) - n$.

10. If A^{θ} is the conjugate transpose of A , then $\text{Rank}\left(A^{\theta}\right) = \text{Rank}\,(\text{A})$ and $\text{Rank}\left(AA^{\theta}\right) = \text{Rank}\,(\text{A})$.

Q. 1 The Rank of the matrix $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **is**

मैट्रिक्स $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **की रैंक है**

3×3

$+1(12-4) + 2(8-12)$

$8 - 8$

0 ✓

$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow 8 - 12 = -4 \neq 0$

✗ a) 3

✗ b) 1

✗ c) 0

✓ d) 2

Q. 2 The Rank of the matrix $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ is

मैट्रिक्स $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}_{3\times4}$ की रैंक है

Rank ≤ 3

~~a) 3~~

b) 4

c) 1

d) 2

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 3(4-6) - 4(6-7) + 1(18-14)$

$= -6+4+4 \neq 0$

Q. 3 The Rank of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 1 \\ 1 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 1 \end{bmatrix}$ is

मैट्रिक्स $\begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 1 \\ 1 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 1 \end{bmatrix}_{4\times4}$ की रैंक है

order 3 = 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 1 & a & b \end{vmatrix}_{3\times3} = 0$$

order 2 में से कोई

det ≠ 0

a) 4

b) 2

c) 1

d) 0

Q. 4 Let Rank $(AB) = 4$, then

मान लें रैंक (AB)=4, तो

a) Rank $(A) \leq 4$ **and** Rank $(B) \geq 4$

b) Rank $(A) \geq 4$ **and** Rank $(B) \leq 4$

c) Rank $(A) \leq 4$ **and** Rank $(B) \leq 4$

d) Rank $(A) \geq 4$ **and** Rank $(B) \geq 4$

Rank(AB) $\leq$ min (Rank A, Rank B).

Q. 5 Rank of a singular matrix of order 5 can be at most

क्रम 5 के एक [redacted] मैट्रिक्स की रैंक अधिकतम हो सकती है

a) 4

b) 5

c) 3

d) 2

$|A| = 0$

order = 4

Rank, 1, 2, 3, (4)

Q. 6 The value of x for which $\rho(A) \leq 2$, where

x का वह मान जिसके लिए ρ(A)≤2 है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 3x-8 & 3 & 3 \\ 3 & 3x-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3x-8 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

a) $5/3$

b) $2/3$

c) $4/3$

d) $1/3$

$$\begin{vmatrix} 3x-8 & 3 & 3 \\ 3 & 3x-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3x-8 \end{vmatrix} = 0$$

Solve it all

Q. 7 If A be a matrix of order mxn and B, C are nonsingular matrix of order n, then

यदि A क्रम mxn का मैट्रिक्स है और B,C क्रम n के गैर-विलक्षण मैट्रिक्स हैं, तो

a) $\text{Rank}\,(ABC) \leq \text{Rank}\,(A)$

b) $\text{Rank}\,(ABC) \geq \text{Rank}\,(A)$

c) $\text{Rank}\,(ABC) = \text{Rank}\,(A) + \text{Rank}\,(BC)$

d) $\text{Rank}\,(ABC) = \text{Rank}\,(A)$

Q. 8 Let A and B be two matrices, then

मान लीजिए कि A और B दो मैट्रिसेस हैं, तो

a) $\text{Rank}\,(AB) = \text{Rank}\,(A^T B^T)$

b) $\text{Rank}\,(AB) = \text{Rank}\,(B^T A^T)$

c) $\text{Rank}\,(AB) \neq \text{Rank}\,(B^T A^T)$

d) $\text{Rank}\,(AB) \neq \text{Rank}\,(AB)^T$

$(AB)^T = B^T A^T$

$\text{Rank}\,A = \text{Rank}\,A^T$

Q. 9 If A be a non-singular matrix of order 4, then the rank of A^3 is

यदि A क्रम 4 का एक सुव्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स है, तो A^3 की रैंक है

a) less than 4

b) greater than 4

c) equal to 4

d) equal to 3

$|A| \neq 0$

Q. 10 Let A be a non-zero nxn real matrix with $n \geq 2$. Which of the following implications is correct?

मान लीजिए कि A एक गैर-शून्य nxn वास्तविक मैट्रिक्स है जिसका n≥2 है। निम्नलिखित में से कौन सा निहितार्थ सही है?

a) $\text{Rank}\,(A) = 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0$

b) $\text{Rank}\,(A) = \text{n} \Rightarrow \det(A) \neq 1$

c) $\det(A) = 0 \Rightarrow \text{Rank}\,(A) = 0$

d) $\det(\text{A}) = 1 \Rightarrow \text{Rank}\,(\text{A}) = \text{n}$

Home-work