DSSSB TGT PART(B)

MATHS

RIEMANN INTEGRATION

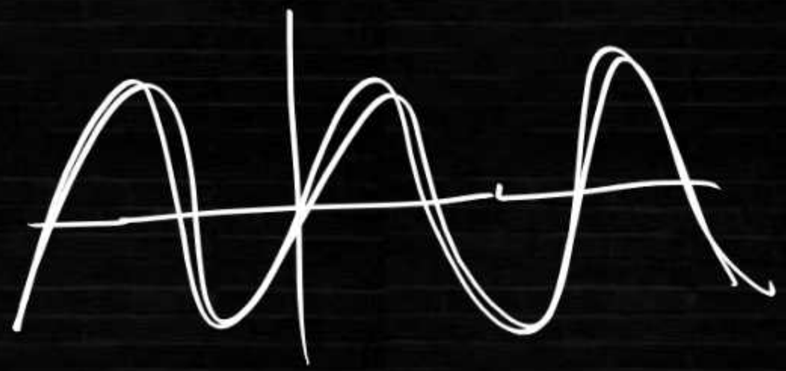
Part -4

LIVE 11/10/2024 08:00 AM

Continuity

✓ by graph

No breakup



LHL = f(a) = RHL ✗

Continuity

Definition of Continuity at a Point: A function $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is said to be continuous at a point $x = a \in \mathbb{R}$; when

एक बिंदु पर सातत्य की परिभाषा: एक फ़ंक्शन f:R→R को एक बिंदु x=a∈R पर सतत कहा जाता है; जब

(1) $f(a)$ **is defined** → $f(x) \Rightarrow f(a)$.

(2) $\lim_{x \to a} f(x)$ **exist** ✓

(3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ✓

Continuity on an Interval: A function is said to be continus on an intervali If it is continuous at every point within that interval.

अंतराल पर निरंतरता: किसी फलन को अंतराल पर निरंतरता कहा जाता है यदि वह उस अंतराल के भीतर प्रत्येक बिंदु पर निरंतरता रखता है।

$f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad [0, 4]$

↳ Polynomial funⁿ : Real no. Continous
(बहुपद फलन)

Epsilon-Delta Definition of Continuity: Let $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, be a real valued function. Then, f is said to be continuous at $x = a \in A$, if for $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, whenever $|x - a| < \delta, x \in A$

निरंतरता की एप्सिलॉन-डेल्टा परिभाषा: मान लें कि $f: A \subseteq R \to R$, एक वास्तविक मान वाला फ़ंक्शन है। तब, $x = a \in A$ पर f को निरंतर कहा जाता है, यदि $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ के लिए s.t. $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, जब भी $|x - a| < \delta, x \in A$

Otherwise, said to be dis-continuity.

अन्यथा, इसे असंतत्य कहा जाएगा।

Note ⟶

1. Sum and Difference of Continuous Functions: If f and g are continuous at a, then $f(x) + g(x)$ and $f(x) - g(x)$ are also continuous at a.

सतत फलनों का योग और अंतर: यदि f और g, a पर सतत हैं, तो f(x)+g(x) और f(x)-g(x) भी a पर सतत हैं।

$f(x)$, $g(x)$

$f(x) \pm g(x)$ → continuous

Ex $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$

$f(x) \pm g(x) = x^2 \pm \sin x$

↓

continuous

2. Product of Continuous Functions: If f and g are continuous at a, then their product $f(x) \cdot g(x)$ is also continuous at a.

सतत फलनों का गुणनफल: यदि f और g, a पर सतत हैं, तो उनका गुणनफल f(x)·g(x) भी a पर सतत होगा।

$f(x)$, $g(x)$ Continuous.

$f(x) \cdot g(x) \rightarrow$ Continuous

3. **Quotient of Continuous Functions:** If f and g are continuous at a and $g(a) \neq 0$, then the quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ is continuous at a.

सतत फलनों का भागफल: यदि f और g, a पर सतत हैं और g(a)≠0 है, तो भागफल $\frac{f(x)}{g(x)}$ a पर सतत है।

4. **Polynomial Functions:** Polynomial functions are continuous everywhere on $\mathbb{R}$. Any sum, difference, or product of polynomials is also continuous.

बहुपद फलन: बहुपद फलन R पर सर्वत्र सतत होते हैं। बहुपदों का कोई भी योग, अंतर या गुणनफल भी सतत होता है।

$f(x) = x^7 + 3x^2 + 7$

↓

Continuous at $x \in R$

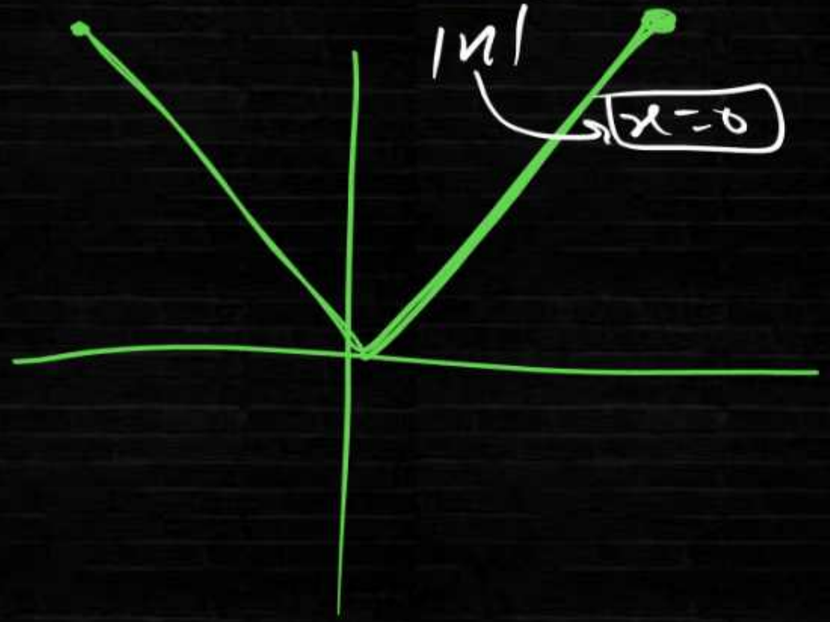
5. Rational Functions: A rational function $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, where $p(x)$ and $q(x)$ are polynomials, is continuous everywhere except where $q(x) = 0$.

परिमेय फलन: एक परिमेय फलन $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, जहाँ $p(x)$ और $q(x)$ बहुपद हैं, जहाँ $q(x)=0$ को छोड़कर, हर जगह सतत होता है।

$h(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ → $x+1=0$ → $x=-1$ → Everywhere continuous except $x=-1$

6. Absolute Value Function: The absolute value function $f(x) = |x|$ is continuous everywhere on $\mathbb{R}$.

निरपेक्ष मान फ़ंक्शन: निरपेक्ष मान फ़ंक्शन f(x)=|x| R पर सर्वत्र सतत है।



modulus funⁿ is always continuous

7. **Composition of Continuous Functions:** If f is continuous at $g(a)$ and g is continuous at a, :hen the composition $f \circ g$ (i.e., $f(g(x))$) is continuous at a.

सतत फलनों का सहपोजन : यदि f, g(a) पर सतत है और g, a पर सतत है, तो संरचना f∘g (अर्थात् f(g(x))) a पर सतत है।

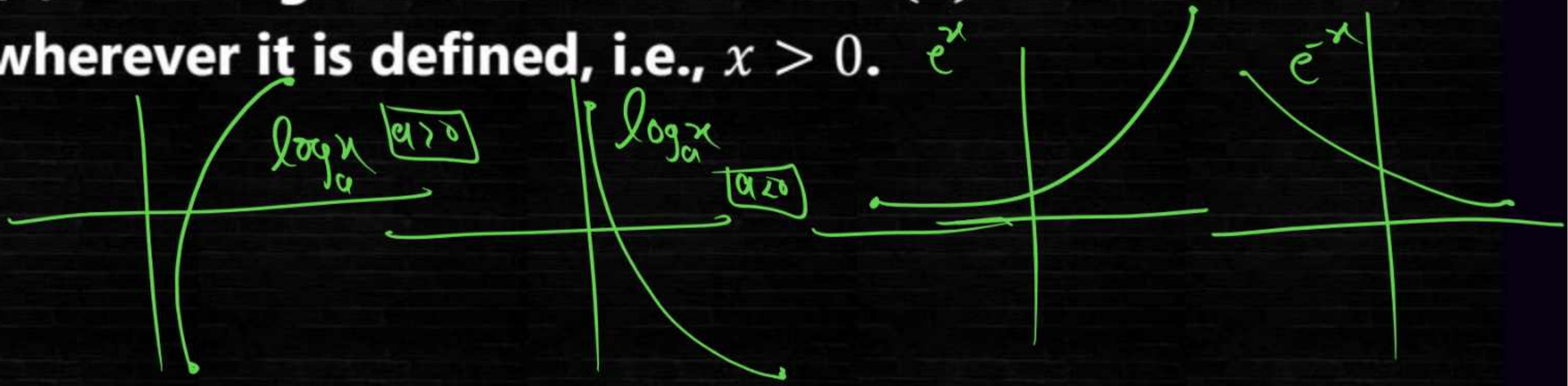
Composition.

8. Exponential and Logarithmic Functions: → always continuous

घातांकीय और लघुगणकीय कार्य:

(i) The exponential function e^x is continuous everywhere.

(ii) The logarithmic function $\ln(x)$ is continuous wherever it is defined, i.e., $x > 0$.



9. Continuity of Trigonometric Functions: The basic trigonometric functions $\sin(x), \cos(x)$, and $\tan(x)$ are continuous on their domains:

त्रिकोणमितीय कार्यों की निरंतरता: मूल त्रिकोणमितीय कार्य $sin(x), cos(x)$, और an (x) अपने डोमेन पर निरंतर हैं:

(i) $\sin(x)$ **and** $\cos(x)$ **are continuous for all** $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $\tan(x)$ **is continuous except where** $\cos(x) = 0$ **(i.e., at** $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ **).**

always

$\tan x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}$

$\cos x \Rightarrow 0$

$\cos x \Rightarrow n\pi + \frac{\pi}{2}$

10. Continuity of Inverse Functions: If f is continuous and one-to-one (biiective) on its domain, then it's inverse f^{-1} is also continuous on the corresponding range.

व्युत्क्रम फलनों की निरंतरता: यदि f अपने डोमेन पर निरंतर और एक-से-एक (द्विआधारी) है, तो इसका व्युत्क्रम f^{-1} भी इसी श्रेणी पर निरंतर है।

Inverse fun^{n} → one-one | onto | bijective

11. Continuity on Closed Intervals: If $f(x)$ is continuous on a closed interval $[a, b]$, hen $f(x)$ attains both a maximum and minimum value on that interval This is known as the Extreme Value Theorem).

बंद अंतराल पर निरंतरता: यदि f(x) एक बंद अंतराल [a,b] पर निरंतर है, तो f(x) उस अंतराल पर अधिकतम और न्यूनतम दोनों मान प्राप्त करता है। इसे चरम मान प्रमेय के रूप में जाना जाता है।

[a,b] → Range

mini

maxi

* all funⁿ is continuous at close interval [a,b];

12. **Sequence criteria of continuity:**

13. **Criteria for not continuous:**

Uniform continuity

Uniform continuity uniform continuous on set A if for any $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ **s.t.** $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, **whenever** $|x - y| < \delta, x, y \in A$

एकसमान सातत्य एकसमान सतत सेट A पर यदि किसी ε>0,∃δ>0 s.t. के लिए |f(x)-f(y)|<ε, जब भी |x-y|<δ,x,y∈A

Otherwise, said to be not uniform continuity.

अन्यथा, इसे एकसमान सातत्य नहीं कहा जाएगा।

Heine-Cantor Theorem: A Continuous function on a closed and bounded interval is uniformly continuous. This is known as the Heine-Cantor Theorem.

हेन-कैंटर प्रमेय: बंद और परिबद्ध अंतराल पर एक सतत फलन समान रूप से सतत होता है। इसे हेन-कैंटर प्रमेय के रूप में जाना जाता है।

Note:

1. If f is continuous function $\Rightarrow$ f is uniform continuity.
2. If f is uniform continuous $\Rightarrow$ f is continuity function.
3. Let a function f be continuous on an open bounded interval (a, b), then f is uniformly continuous on (a, b) if $\lim_{x\to a^+} f(x) \& \lim_{x\to b^-} f(x)$ both exist finitely. it is necessary condition.

4. Uniform Continuity and Sequences (Sequential Criterion): A function f is uniformly continuous if, for every sequence $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ in the domain such that $|a_n - b_n| \to 0$, it follows that $|f(a_n) - f(b_n)| \to 0$

Algebra of U.C.: If f and g are two uniform continuity function Then,

यू.सी. का बीजगणित: यदि f और g दो समान सातत्य फलन हैं तो,

(i) $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ is uniform continuity.

(ii) fog is uniform continuity.

(5) Product of Uniformly Contīnuous Functions: If f and g are uniformly continuous on a domain I, then their product $f(x) \cdot g(x)$ may not necessarily be uniformly continuous

समान रूप से सतत कार्यों का गुणनफल: यदि f और g एक डोमेन I पर समान रूप से सतत हैं, तो उनका गुणनफल f(x)·g(x) आवश्यक रूप से समान रूप से सतत नहीं हो सकता है

(6) If f and g are two bounded function and uniform continuous function. Then, f.g is uniform continuous.

यदि f और g दो परिबद्ध फलन और एकसमान सतत फलन हैं। तो, f.g एकसमान सतत फलन है।

(7) If $f(x)$ is continuous function. If derivative of $f(x)$ is bounded

(i.e. $|f'(x)| \leq k$) Then, $f(x)$ is uniform continuous. But converse need not true.

(8) If a function $f: (a, b) \underset{a,b \in \mathbb{R}}{\rightarrow} \mathbb{R}$ is continúous function.

Then, f is uniform continuity iff $\lim_{x \to a^+} f(x)$ and $\lim_{x \to b^-} f(x)$ exists finitely

(9) If f is continuous and periodic function Then, $f(x)$ is uniform continuous function.

Sin | Cos | tan — — —