Area bounded by curve

Applications of Integrals

Area under the curve

Area between two Curves

Area under A Curve

If $f(x)$ **be a continuous non-negative function in** $a \leq x \leq b$**, then the area bounded by the curve** $y = f(x)$**, the** $\mathrm{x-axis}$ **and ordinates** $\mathrm{x = a}$ **and** $\mathrm{x = b}$ **is given by the definite integral** $\int_a^b f(x)dx$**.**

यदि f(x) a≤x≤b में एक सतत अऋणात्मक फलन है, तो वक्र y=f(x), x-अक्ष और निर्देशांक x=a और x=b से घिरा क्षेत्र निश्चित समाकल $\int_a^b f(x)dx$ **द्वारा दिया जाता है।**

$$\boxed{\textbf{Required Area} = \int_a^b f(x)dx.}$$

(I) $y = f(x)$, $x = a, b.$

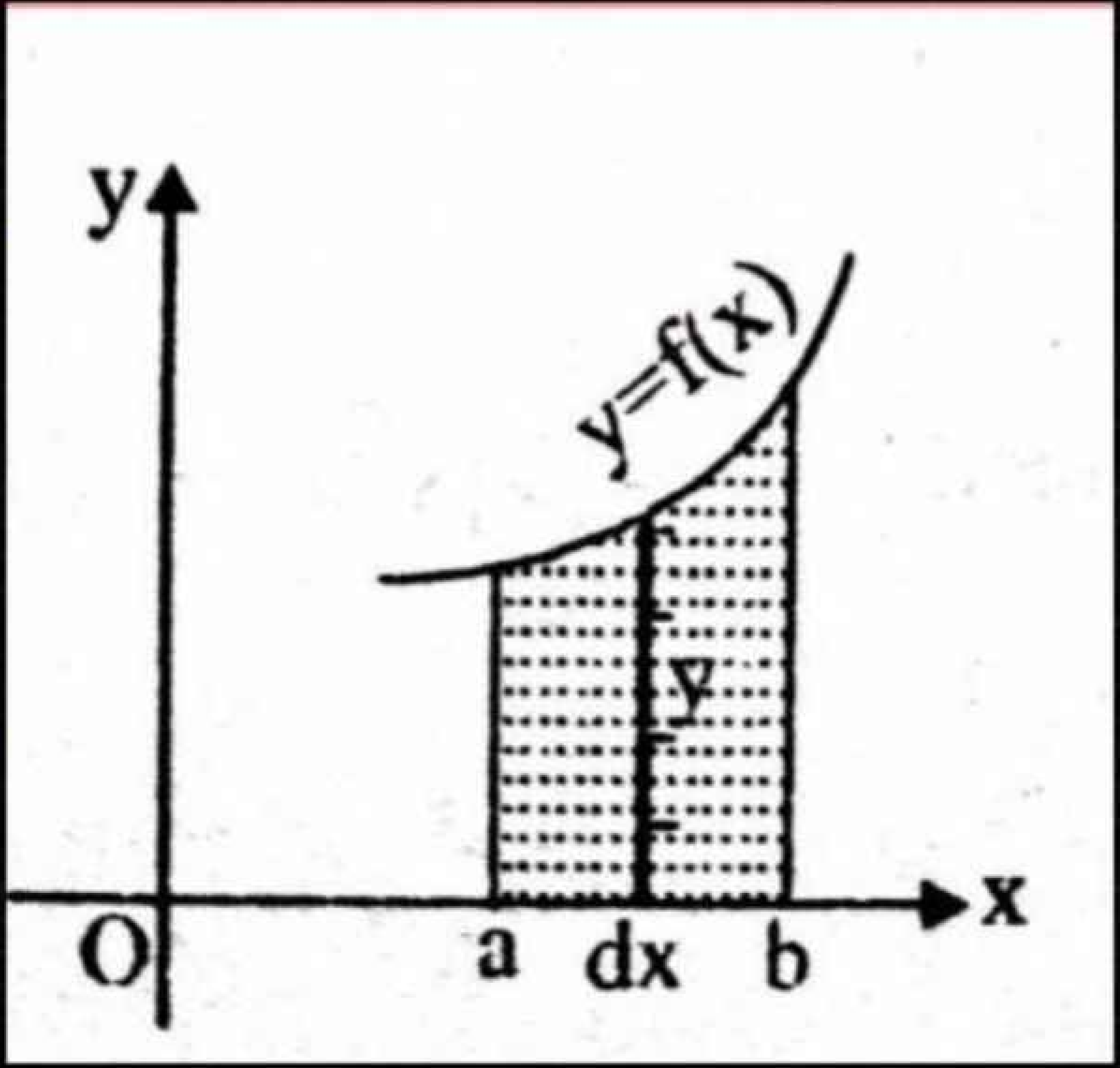
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$$

Area And position of curve with Axes

1. Area lying above the x-axis

If $\mathrm{f(x)} \geq 0$ for $\mathrm{a} \leq x \leq b$, then the graph of $y = f(x)$ lies above the x-axis .

यदि a≤x≤b के लिए f(x)≥0 है, तो y=f(x) का ग्राफ x-अक्ष के ऊपर स्थित होता है।



Therefore, the required Area bounded by curve $y = f(x)$, x - axis and the ordinates $x = a$ and $x = b$ is given by

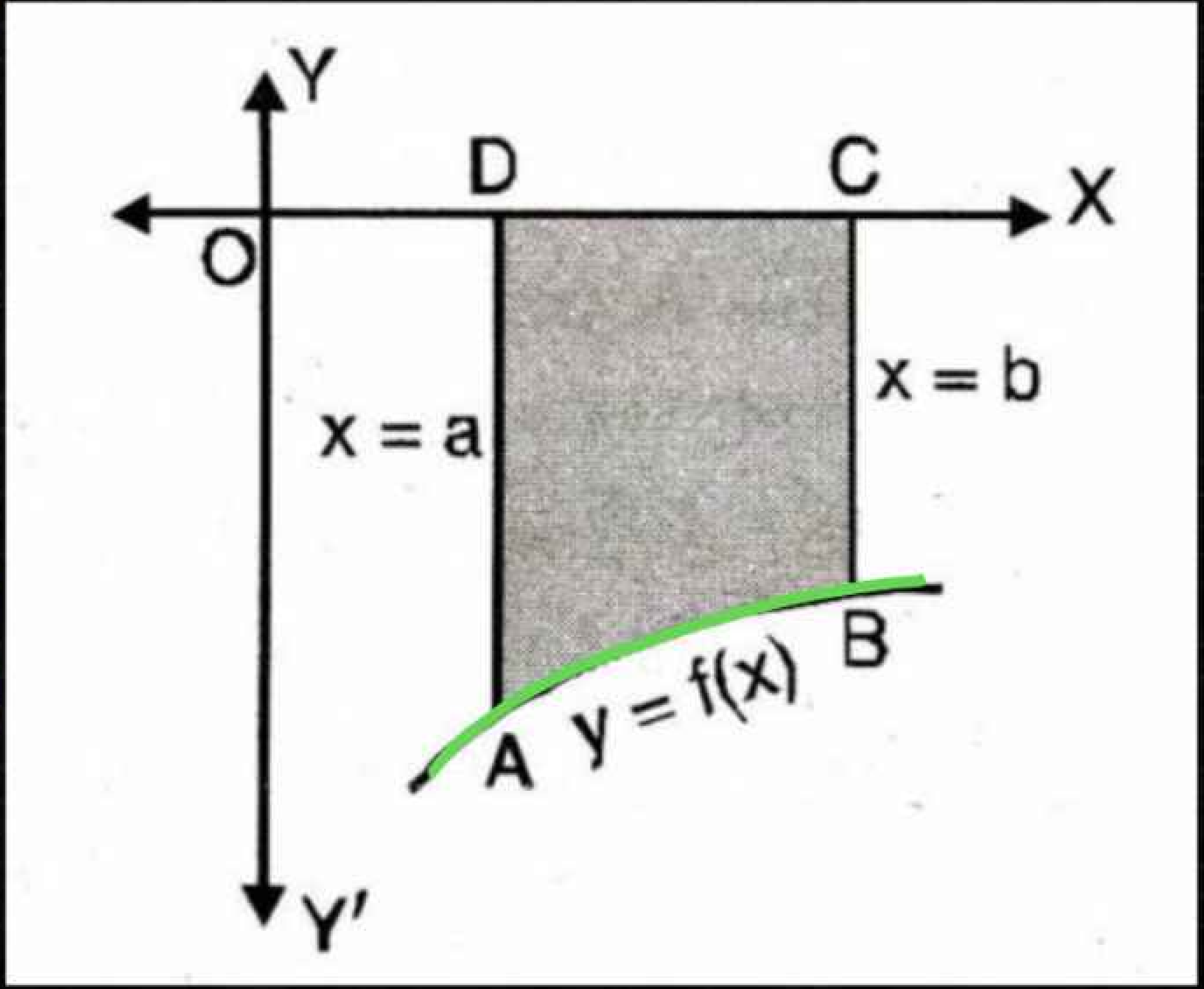
इसलिए, वक्र y=f(x), x-अक्ष और निर्देशांक x=a और x=b से घिरा अभीष्ट क्षेत्रफल निम्न प्रकार दिया गया है

Required Area $= \int_a^b f(x)dx$

2. Area lying below the x - axis

If $f(x) \le 0$ **for** $a \le x \le b$, **then the graph of** $y = f(x)$ **lies below the** x**-axis.]**

यदि a≤x≤b के लिए f(x)≤0 है, तो y=f(x) का ग्राफ x-अक्ष के नीचे स्थित होता है।



Therefore, the required Area bounded by curve $y = f(x), x$ **- axis and the ordinates** $x = a$ **and** $x = b$ **is given by**

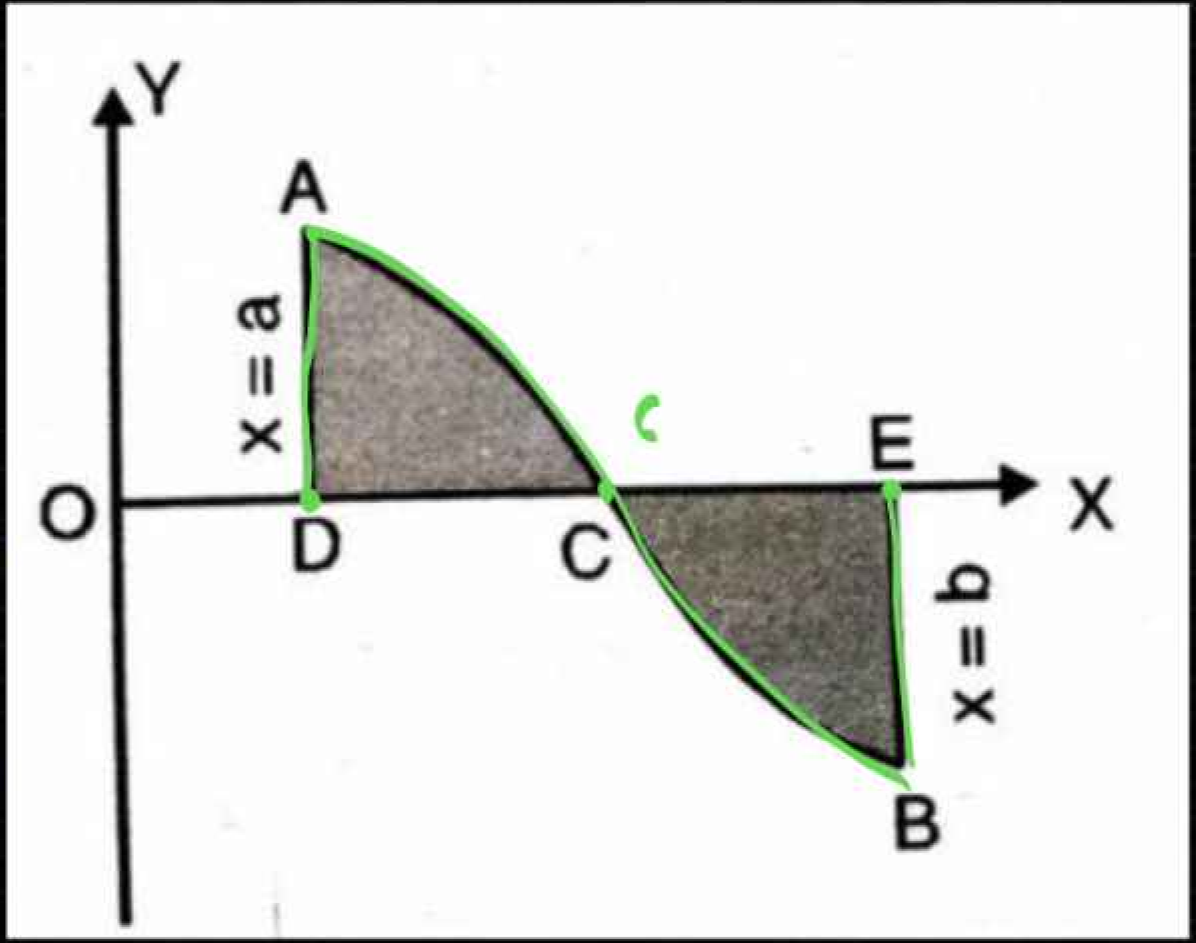
इसलिए, वक्र y=f(x),x-अक्ष और निर्देशांक x=a और x=b से घिरा आवश्यक क्षेत्र निम्न प्रकार दिया गया है

Required Area $= -\int_a^b f(x)dx$

3. Area lying above as well as below the x-axis

If $f(x) \geq 0$ for $a \leq x \leq c$ and $f(x) \leq 0$ for $c \leq x \leq b$, then the required Area bounded by curve $y = f(x), x$ - axis and the ordinates $x = a$ and $x = b$ is given by

यदि a≤x≤c के लिए f(x)≥0 और c≤x≤b के लिए f(x)≤0 है, तो वक्र y=f(x),x - अक्ष और निर्देशांक x=a और x=b से घिरा आवश्यक क्षेत्र निम्न प्रकार से दिया गया है



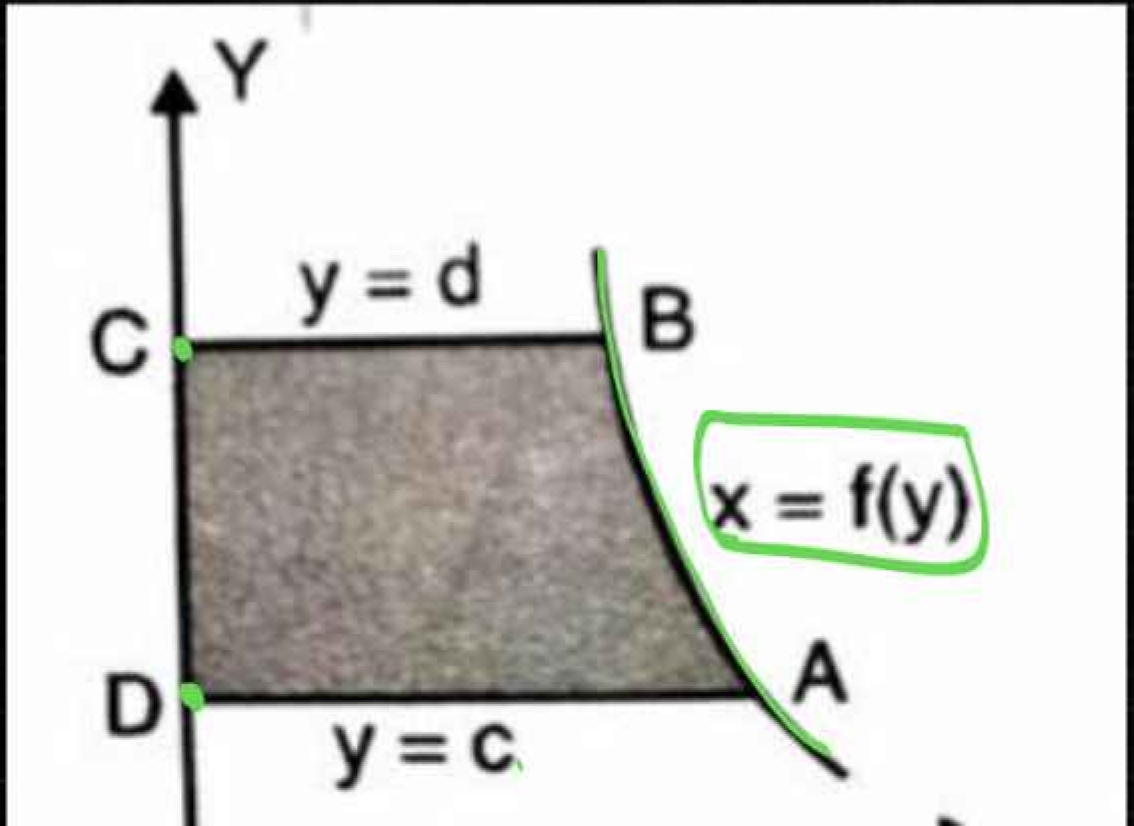
Required Area $= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b -f(x)dx$

4. Area lying Right to the y-axis

The area bounded by the curve $x = f(y)$, the y - axis and the abscissae $y = c$ and $y = d$ is given by

वक्र x=f(y), y-अक्ष और भुज y=c तथा y=d से घिरा क्षेत्र निम्न प्रकार दिया गया है

Required Area $= \int_c^d f(y)dy$.

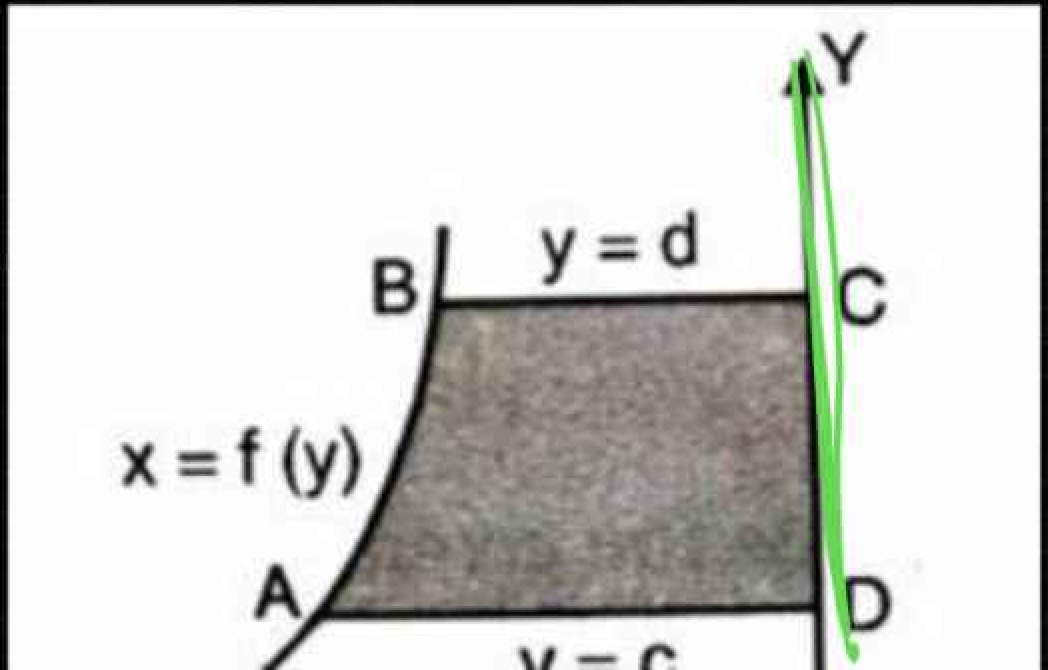


5. Area lying left to the y-axis

The area bounded by the curve $x = f(y)$ y - axis and abscissae $y = c$ and $y = d$ is given by

वक्र x=f(y) y - अक्ष और भुज y=c और y=d से घिरा क्षेत्र निम्न द्वारा दिया गया है

$$\boxed{\text{Required Area} = \int_c^d -f(y)dy.}$$



Example:- 1 **Evaluate the area between the curve $y = x^2, x$ axis and the lines $\mathrm{x} = 0$ and $\mathrm{x} = 2$**

वक्र $y = x^2$,x अक्ष और रेखाओं x=0 और x=2 के बीच के क्षेत्र का मूल्यांकन करें

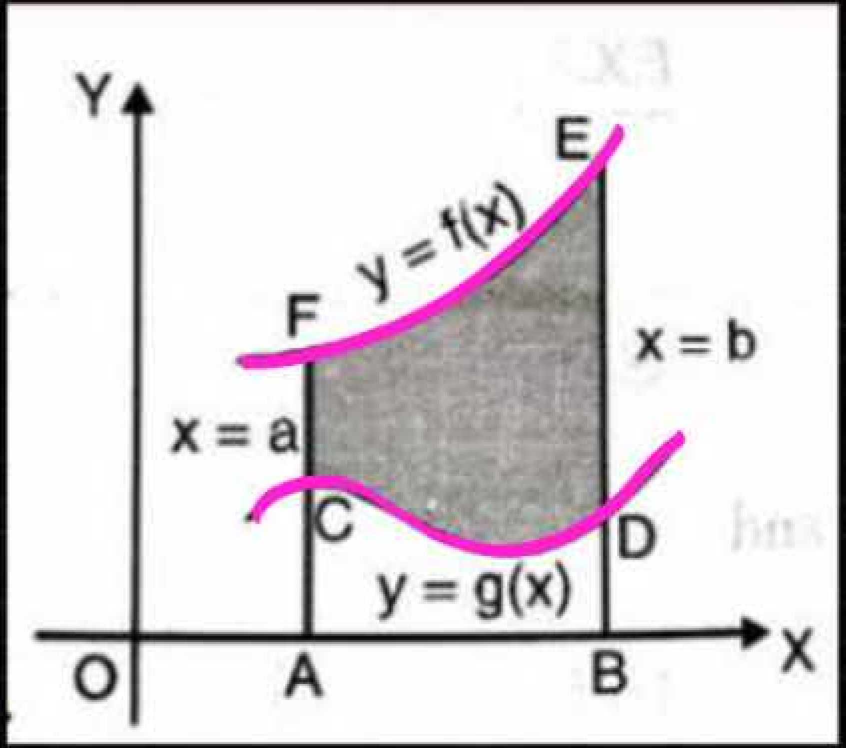
$$\int_0^2 x^2\,dx$$

$$\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - 0$$

$$= \frac{8}{3}$$

Area Between two curves

Let $f(x)$ and $g(x)$ be two curves and $x = a$ and $x = b$ be two lines and suppose we have to find the Area between two curves $f(x)$ and g(x) for $a \leq x \leq b$ then for $0 \leq g(x) \leq f(x)$



मान लें कि f(x) और g(x) दो वक्र हैं और x=a और x=b दो रेखाएँ हैं और मान लीजिए हमें a≤x≤b के लिए दो वक्रों f(x) और g(x) के बीच का क्षेत्र ज्ञात करना है फिर 0≤g(x)≤f(x) के लिए

$$\boxed{\text{Required Area } = \int_a^b \left(y_{\text{upper}} - y_{\text{lower}}\right) dx}$$

i.e Required Area $= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

i.e Required Area $= \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

Note :- To find the ordinates a and b, we find the points of intersection of the two curves by solving their equations simultaneously.

निर्देशांक a और b ज्ञात करने के लिए, हम दोनों वक्रों के समीकरणों को एक साथ हल करके उनके प्रतिच्छेद बिंदु ज्ञात करते हैं।

Example:- 2 **Find the area between the curves $y = x$ and $y = x^3$**

वक्र y=x और $y = x^3$ के बीच का क्षेत्र ज्ञात कीजिए

$x = x^3$

$x^3 - x = 0$

$x(x^2 - 1) = 0$

$\boxed{x = 0,\ x = \pm 1}$

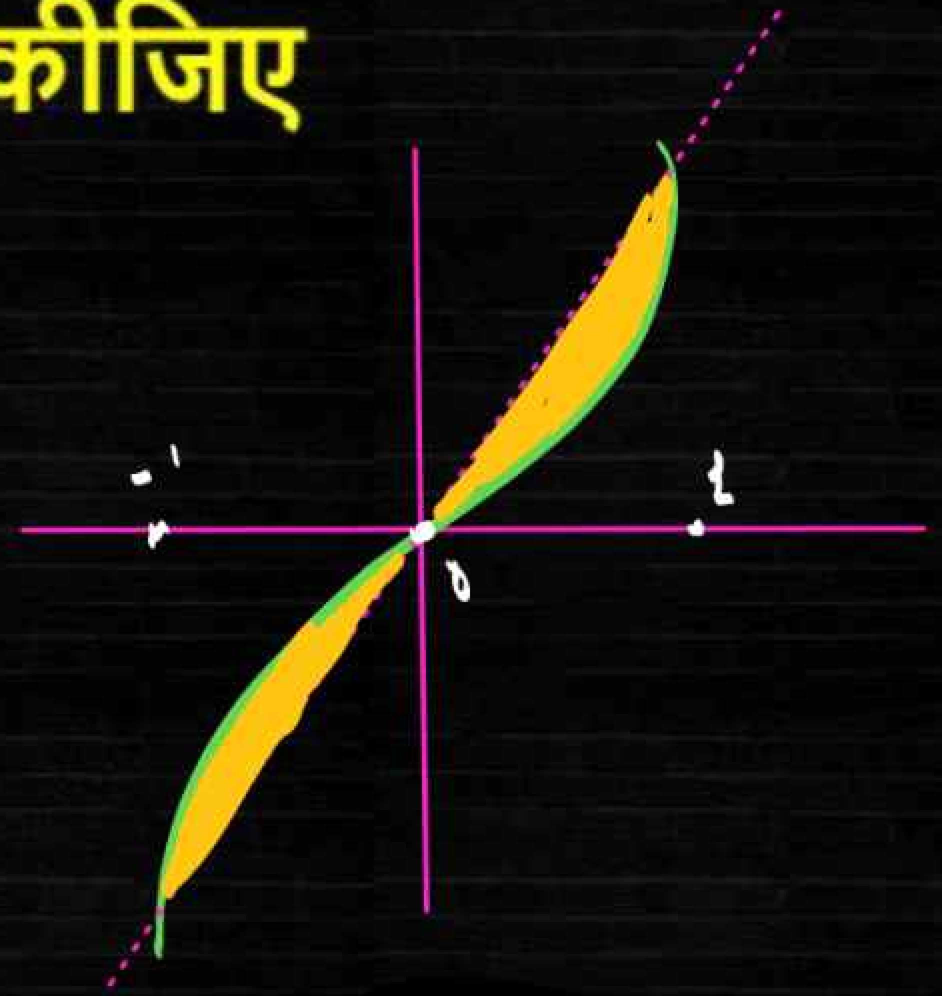
$\int_0^1 x - x^3 \, dx$

$\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}$

Req. Area $\Rightarrow 2 \times \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{2}$



[redacted]

Some Shortcut Results

1. Area of the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ is always $\boxed{\pi ab}$

2. The area between a parabola and its $\mathrm{LR}=\boxed{\frac{1}{6}(LR)^2}$

3. The area between parabolas $y^2=4ax$ and $x^2=4by$ is given by $\boxed{\frac{(4a)(4b)}{3}}$

Example:- 3 **Find the area between the parabola $y^2 = 4ax$ and its latus rectum.**

परवलय $y^2 = 4ax$ और उसके नाभिलंब [redacted] के बीच का क्षेत्र ज्ञात कीजिए।

नाभिलम्ब $\Rightarrow 4a$

$$\text{Area} = \frac{1}{6}(L.R)^2 = \frac{1}{\cancel{6}_{3}} \times \cancel{4}^{2}a \times 4a$$

$$\frac{8a^2}{3}$$

Example:- 4 **Find the area between the parabolas $y^2 = 4ax$ and $x^2 = 4ay$.**

Area $\Rightarrow \dfrac{4a \times 4a}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{16a^2}{3}$ //

Q. 7 The area between the curves $y = x^2$ and $y = x^3$ is

वक्र $y = x^2$ और $y = x^3$ के बीच का क्षेत्रफल क्या है?

a) $1/3$

b) ¼

c) $1/6$

d) $1/12$

$x^3 = x^2$

$x^3 - x^2 = 0$

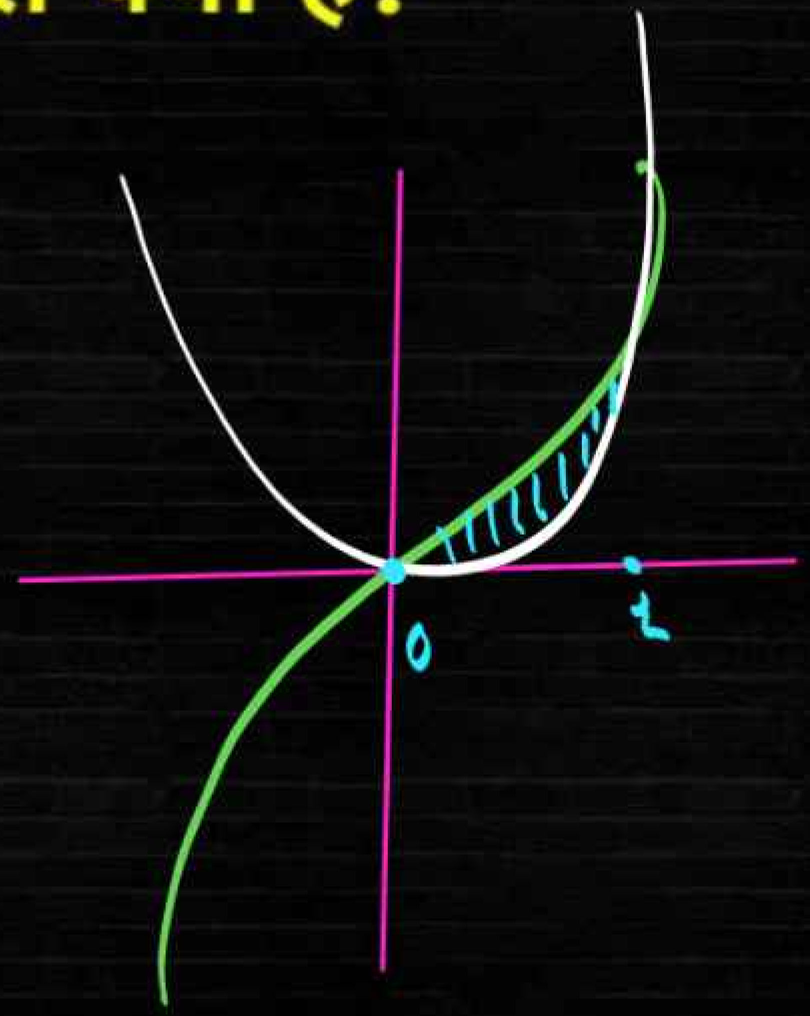
$x^2(x-1) = 0$

$\boxed{x = 0, 1}$

$\int_0^1 x^3 - x^2$

$\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$

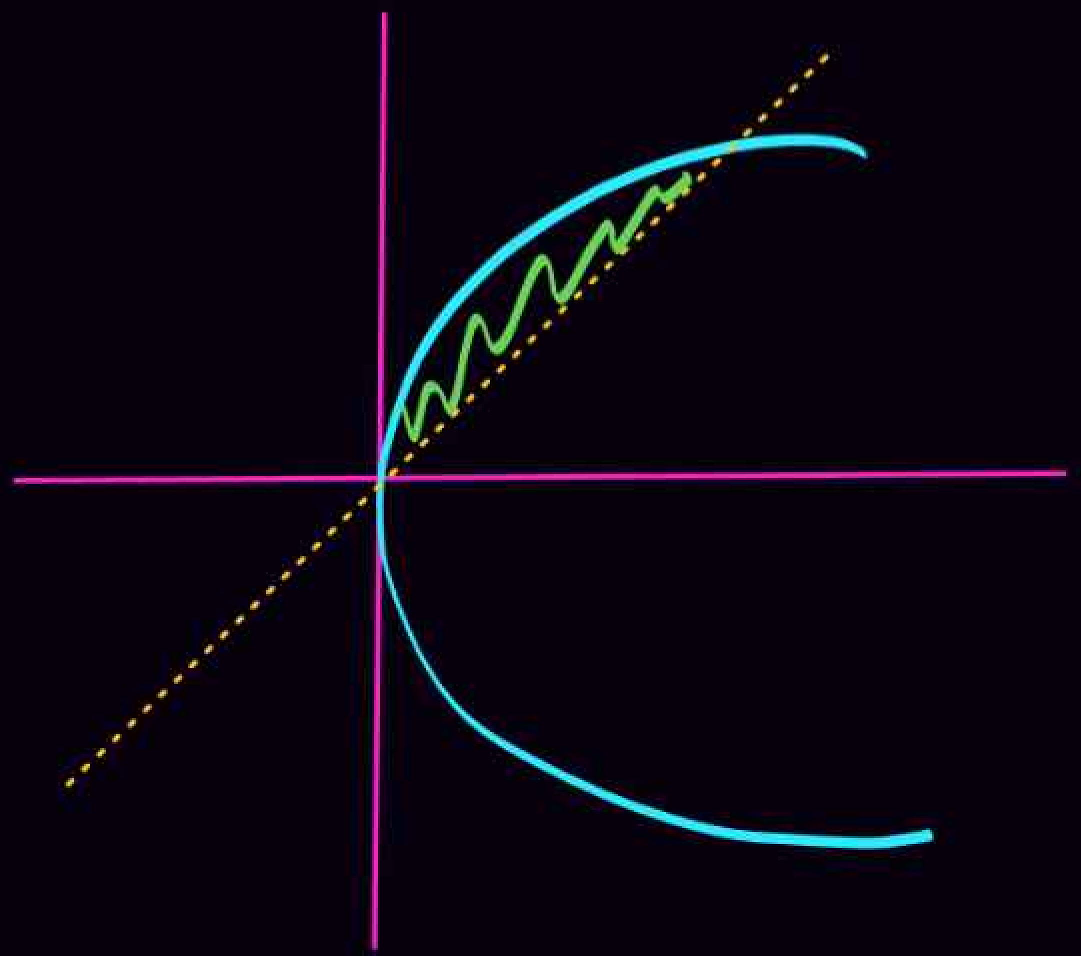
$\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3-4}{12} = \frac{-1}{12}$



Important Concept.

① $y^2 = 4ax$ and $y = mx$.

$$\boxed{\text{Area} \Rightarrow \frac{8a^2}{3m^3}}$$



Que $y^2 = 2x$ and line $y = x$ then area b/w Curve.

$4a = 2$

$a = \frac{1}{2}$

$m = 1$

$$\text{Area} = \frac{\cancel{8}^{2} \times \cancel{\frac{1}{2}} \times \cancel{\frac{1}{2}}}{3 \times 1} \Rightarrow \frac{2}{3}$$

7) $y^2 = 4ax$ and $y = mx + c$.

$$\boxed{\text{Area} \Rightarrow 72 \cdot \frac{a^2}{m^3}}$$

<u>Que</u> If $y^2 = 3x$ and $y = 2x + 3$ then find the area b/w bounded these curve.

$4a = 3$

$a = 3/4$

$m = 2$

$$\text{Area} \Rightarrow \frac{\cancel{72}^{\,\cancel{18}\ 9} \cdot \frac{3}{\cancel{4}} \times \frac{3}{\cancel{4}_{\,2}}}{2 \times 2 \times 2} \Rightarrow \frac{9 \times 9}{16} = \frac{81}{16}$$

$x^2 = 4by$ and $y = mx$.

$$\boxed{\text{Area} \Rightarrow \frac{8}{3} a^2 m^3}$$

if $x^2 = 6y$, line $y = 4x$

then area b/w parabola and line.

$4b = 6$

$b = 3/2$

$m = 4$

$$\text{Area} \Rightarrow \frac{8}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \times \frac{3}{\cancel{2}} \times \cancel{4} \times 4 \times 4$$

$\Rightarrow 16 \times 24$

$\Rightarrow 384$

⊕ $x^2 = 4by$, line $y = mx + c$

$$\boxed{\text{Area} \Rightarrow 72 \cdot b^2 m^3}$$

Q4 $4y = 3x^2$ and $2y = 3x + 12$.

Area b/w —

$y = \frac{3}{2}x + 6$

$x^2 = \frac{4}{3}y$

$m = \frac{3}{2}$

$4b = \frac{4}{3}$

$b = 1/3$

$\text{Area} \Rightarrow \overset{9}{\cancel{72}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \times \frac{3}{\cancel{2}}$

$\Rightarrow 27$