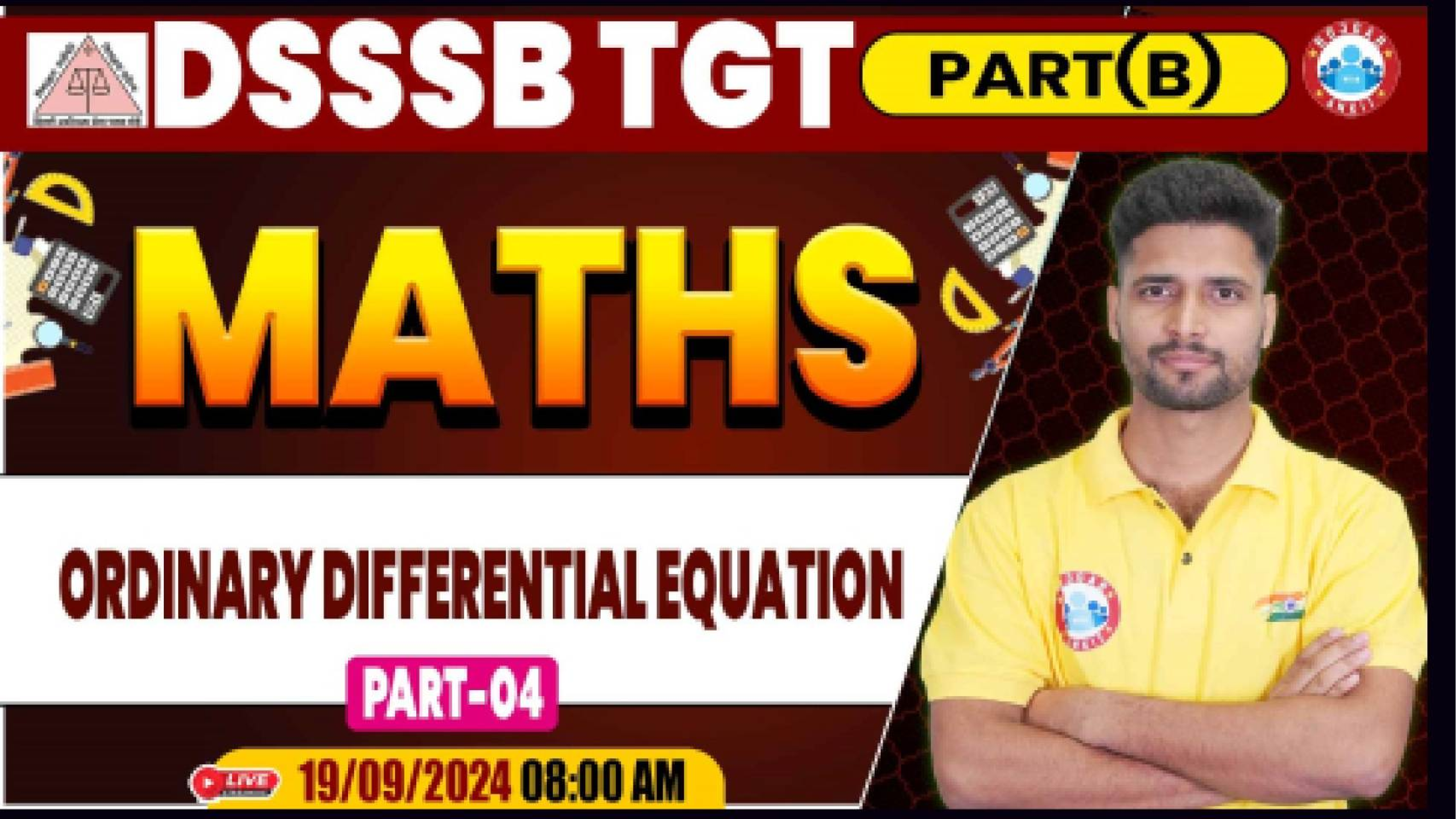
DSSSB TGT
PART(B)
MATHS
ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION
PART-04
LIVE
19/09/2024 08:00 AM

Q. The orthogonal trajectories of the family of curve $px^2 + qy^2 = a^2$ where p and q are constants, is given by

वक्र $px^2 + qy^2 = a^2$ के परिवार के ऑर्थोगोनल प्रक्षेप पथ जहां p और q स्थिरांक हैं, द्वारा दिया गया है

a) $x^p = cy^q$

b) $y^{-p} = cx^{-q}$

c) $y^p = cx^{-q}$

d) $y^p = cx^q$ ✓

$2px + 2qy \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-px}{qy}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{qy}{px}$

$\frac{dy}{qy} = \frac{dx}{px}$

$\frac{1}{q}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{p}\int \frac{dx}{x}$

$\frac{1}{q}\log y = \frac{1}{p}\log x + \log c$

$\cancel{\log} y^{1/q} = \cancel{\log} x^{1/p} \cdot c$

$\left(y^{1/q}\right)^{pq} = c\left(x^{1/p}\right)^{pq}$

$\boxed{y^p = cx^q}$

Q. The orthogonal trajectories of the family $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ **is given by**

$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ **परिवार के ऑर्थोगोनल प्रक्षेप पथ निम्न द्वारा दिए गए हैं**

a) $y^{3/4}=x^{3/4}+c^{3/4}$

b) $y^{4/3}=x^{4/3}+c^{4/3}$

c) $y^{4/5}=x^{4/5}+c^{4/5}$

d) None of these

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{2}{3}y^{-1/3}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x^{-1/3}}{y^{-1/3}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^{-1/3}}{x^{-1/3}}$$

$$\int\frac{dy}{y^{-1/3}}=\int\frac{dx}{x^{-1/3}}$$

$$\int y^{1/3}=\int x^{1/3}\,dx$$

$$\frac{y^{4/3}}{4/3}=\frac{x^{4/3}}{4/3}+\frac{c\,x^{4/3}}{4/3}$$

$$y^{4/3}=x^{4/3}+\frac{4}{3}\cdot c$$

$$c^{4/3}$$

Q. The orthogonal trajectories for the family of curves $r = a(1 - \cos\,\theta)$, where a is the parameter, is given by

वक्रों के परिवार $r = a(1 - cos\ \theta)$ के लिए ऑर्थोगोनल प्रक्षेप पथ, जहाँ a पैरामीटर है, द्वारा दिया जाता है

a) $r = c(1 + \sin\,\theta)$

b) $r = c(1 - \sin\,\theta)$

c) $r = c(1 + \cos\,\theta)$

d) $r = c(1 - \cos\,\theta)$

Linear Differential Equation with constant coefficients

A differential Equation of the from एक विभेदक समीकरण

order

$$\boxed{P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + P_n y = X}$$

$$\boxed{\left(\frac{dy}{dx}\right)^1 + Px = Q}$$

Where $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ are constants and X is a function of x or constant, is known as Linear differential Equation with constant coefficients.

जहाँ $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ स्थिरांक हैं और X, x का एक फलन या स्थिरांक है, इसे स्थिर गुणांक वाले रैखिक अवकल समीकरण के रूप में जाना जाता है।

For Examples:-

1. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0 \rightarrow x$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 25y = 104e^{3x} \rightarrow x$

Symbolic

$D^2 - 4D + 4y = 0$

$f(D) = 0$

$(D^2 - 4D + 4)y = 0 \rightarrow D = D_1, D_2$

Working Rule

1. Write the given equation in symbolic form by using D for $\frac{d}{dx}$ and D^2 for $\frac{d^2}{dx^2}$ etc.

दिए गए समीकरण को $\frac{d}{dx}$ के लिए D तथा $\frac{d^2}{dx^2}$ के लिए D^2 आदि का उपयोग करके प्रतीकात्मक रूप में लिखें।

2. Write Auxiliary equation (A.E) i.e $\boxed{f(m) = 0}$ and find its roots like m_1, m_2 and m_3 etc.

सहायक समीकरण (A.E) लिखें, अर्थात f(m)=0 तथा इसके मूल ज्ञात करें, जैसे m_1, m_2 तथा m_3 आदि।

3. Now we shall write Complementary Function (C.F) by using a specific method.

अब हम एक विशिष्ट विधि का उपयोग करके पूरक फलन (C.F) लिखेंगे।

4. Write Particular Integral given by $P.I = \frac{1}{f(D)} X$

$P.I = \frac{1}{f(D)}$ X द्वारा दिया गया विशेष समाकलन लिखें

5. Finally Complete Solution, $y = C.F + P.I$

अंत में पूर्ण समाधान, y=C.F+P.I

Method to find Complementary Function from Auxiliary Equation

सहायक समीकरण से पूरक फलन ज्ञात करने की विधि

Nature of roots	$C \cdot F$
Real and different Like m_1 and m_2	$C.F = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$
Real and equal Like $m_1 = m_2 (= m)$	$C.F = c_1 e^{mx} + x c_2 e^{mx}$ $+ x^2 c_3 e^{dx}$ - - - -
Complex in pairs Like $\alpha \pm i\beta$	$C.F = e^{\alpha x}(c_1 \cos\ \beta x + c_2 \sin\ \beta x)$
Complex and repeated Like $\alpha \pm i\beta$ and $\alpha \pm i\beta$	$C.F = e^{\alpha x}(c_1 \cos\ \beta x + c_2 \sin\ \beta x) + x e^{\alpha x}(c_3 \cos\ \beta x + c_4 \sin\ \beta x)$

Real val.

2 $-2i$

D^2-4D+4

Method To Find Particular Integral (P.I)

Case – 1

$$\frac{1}{f(D)} \cdot e^{ax} = \frac{1}{f(a)} \cdot e^{ax}, \textbf{ where } f(a) \neq 0$$

Case – 2

$$\frac{1}{f(D^2)} \cdot \sin\ ax = \frac{1}{f(-a^2)} \cdot \sin\ ax, \textbf{ where } f(-a^2) \neq 0$$

$$\frac{1}{f(D^2)} \cdot \cos\ ax = \frac{1}{f(-a^2)} \cdot \cos\ ax, \textbf{ where } f(-a^2) \neq 0$$

Case – 3

$\frac{1}{f(D)} \cdot x^m$, where m is a positive integer.

$\frac{1}{f(D)} \cdot x^m$, जहाँ m एक धनात्मक पूर्णांक है।

1. For this type firstly we will take common lowest degree term from $f(D)$ and the remaining factor will be of the from $[1 \pm \phi(D)]$

इस प्रकार के लिए सबसे पहले हम f(D) से सामान्य न्यूनतम डिग्री वाला पद लेंगे और शेष कारक [1±ϕ(D)] से होगा।

2. Take $[1 \pm \phi(D)]$ to the numerator with negative power and expand it by using following binomial expansion

[1±ϕ(D)] को ऋणात्मक घात वाले अंश पर ले जाएँ और निम्नलिखित द्विपद विस्तार का उपयोग करके इसका विस्तार करें

(a) $(1-D)^{-1} = 1 + D + D^2 + D^3 + \cdots$ to ∞

(b) $(1+D)^{-1} = 1 - D + D^2 - D^3 + \cdots$ to ∞

(c) $(1-D)^{-2} = 1 + 2D + 3D^2 + 4D^3 + \cdots$ to ∞

(d) $(1+D)^{-2} = 1 - 2D + 3D^2 - 4D^3 + \cdots$ to ∞

(e) $(1-D)^{-3} = 1 + 3D + 6D^2 + 10D^3 + \cdots$ to ∞

(f) $(1+D)^{-3} = 1 - 3D + 6D^2 - 10D^3 + \cdots$ to ∞

Important

Case -4

other funⁿ. $e^{2x} \cdot \cos 7x$

$\frac{1}{f(D)}(e^{ax}V) = e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}V$, **where** V **is a function of** x**.**

Case -5

$\frac{1}{f(D)}(xV) = x\frac{1}{f(D)}V + \frac{d}{dD}\left[\frac{1}{f(D)}\right]V$, **where** V **is a function of** x**.**

Example

Solve the differential Equation $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + y = 0$

① Symbolic form

$D^2 - 4D + y = 0 \to x$

② Auxiliary eqn. $f(D) = 0$

$(D^2 - 4D + 1)y = 0$

$D^2 - 4D + 1 = 0$

$D \Rightarrow \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\times1\times1}}{2}$

$D \Rightarrow \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$

$2+\sqrt{3}$

$2-\sqrt{3}$

Real + different.

③ C.F (Real and different).

$CF \Rightarrow c_1 e^{(2+\sqrt{3})x} + c_2 e^{(2-\sqrt{3})x}$

④ P.I $\Rightarrow \frac{1}{f(D)} \cdot X$

$PI \Rightarrow \frac{1}{D^2 - 4D + 1} \cdot 0$

$PI = \frac{1}{2^2 - 4\times2+1} \cdot 0 \Rightarrow 0$

⑤ Complete sol^n

$y = C.F + PI$

$$\boxed{y = c_1 e^{(2+\sqrt{3})x} + c_2 e^{(2-\sqrt{3})x}}$$

Example - **Solve the differential Equation**

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 25y = 104e^{3x}$$

x

① $D^2 + 6D + 25y = 104e^{3x}$

② $f(D) = 0$

$(D^2+6D+25)y = 0$

$D \Rightarrow \frac{-6 \pm \sqrt{36-100}}{2}$

$D = \frac{-6 \pm \sqrt{64}\,i}{2}$

$D = \frac{-6 \pm 8i}{2}$

α β

$-3+4i$ → Pair

$-3-4i$

③ CF (Roots in pair).

$CF \Rightarrow e^{-3x}(c_1\cos 4x + c_2\sin 4x)$.

④ P.I

$\Rightarrow \frac{1}{D^2-6D+25} \cdot x$

$\Rightarrow \frac{1}{(-3)^2-6\times-3+25} \times 104e^{3x}$

$= \frac{1}{\cancel{52}} \times \cancel{104}^{\,2} e^{3x} \Rightarrow 2e^{3x}$

⑤ Complete solⁿ

$y = C.F + P.I$

$$\boxed{y = e^{-3x}(c_1\cos 4x + c_2\sin 4x) + 2e^{3x}}$$