DSSSB TGT PART(B)

MATHS

ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

PART-03

LIVE 18/09/2024 08:00 AM

Lagrange's Equation

$\frac{dy}{dx} = p$

The differential equation of the form $y = x\phi(p) + f(p)$ where $\phi(p)$ and $f(p)$ are functions of p only is called Lagrange's equation.

$y=x\phi(p)+f(p)$ के रूप का अवकल समीकरण, जहाँ $\phi(p)$ और $f(p)$ केवल p के फलन हैं, लैग्रेंज समीकरण कहलाता है।

Working Rule For Lagrange's Equation

1. Express the given equation in the form $y = x\phi(p) + f(p)$

दिए गए समीकरण को y=xϕ(p)+f(p) के रूप में व्यक्त करें

2. Differentiate w.r.t x and put $\frac{dy}{dx} = p$

x के संबंध में अवकलन करें और $\frac{dy}{dx} = p$ रखें

3. The equation reduces to a linear differential equation in variables x and p.

समीकरण x और p चरों में एक रैखिक अवकल समीकरण में बदल जाता है।

$$\frac{dy}{dx} + py = 0$$

$$IF \Rightarrow e^{\int p\,dx}$$

$$Soln \Rightarrow y \cdot IF = \int x \cdot IF + c$$

4. The solution obtained in above step together with given equation is the required solution.

दिए गए समीकरण के साथ उपरोक्त चरण में प्राप्त समाधान ही अपेक्षित समाधान है।

Q Sol^n of the D.E. $y = 2px + p^2$.

(I, II)

Diff w.r.t to x

$$\frac{dy}{dx} = 2p \times 1 + 2x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}$$

($\frac{dy}{dx} = p$)

$$-p = 2\frac{dp}{dx}(x + p).$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{2x}{-p} - \frac{2p}{p}$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} = -2 \quad \rightarrow \text{linear D.E}$$

($\frac{2}{p} \rightarrow P$, $-2 \rightarrow Q$)

$$IF \Rightarrow e^{\int \frac{2}{p}dx} \Rightarrow e^{2\log p} \Rightarrow e^{\log p^2}$$

$$IF = p^2$$

Sol^n

$$x \cdot p^2 = \int -2p^2 dx + c$$

$$xp^2 = -2\frac{p^3}{3} + c$$

$$x = \frac{-2p}{3} + \frac{c}{p^2}$$

$$y = 2p\left[\frac{-2p}{3} + \frac{c}{p^2}\right] + p^2 \longrightarrow y = \frac{-4p^2}{3} + \frac{2c}{p} + p^2$$

$$y = \frac{-p^2}{3} + \frac{2c}{p} \; //$$

Example

Solve the differential Equation $x - yp = ap^2$

अंतर समीकरण $x - yp = ap^2$ **हल करें**

Self

Trajectory

A curve is called trajectory if it cuts every member of a given family of curves according to a certain law.

एक वक्र को प्रक्षेप पथ कहा जाता है यदि वह किसी निश्चित नियम के अनुसार वक्रों के दिए गए परिवार के प्रत्येक सदस्य को काटता है।

Orthogonal Trajectory

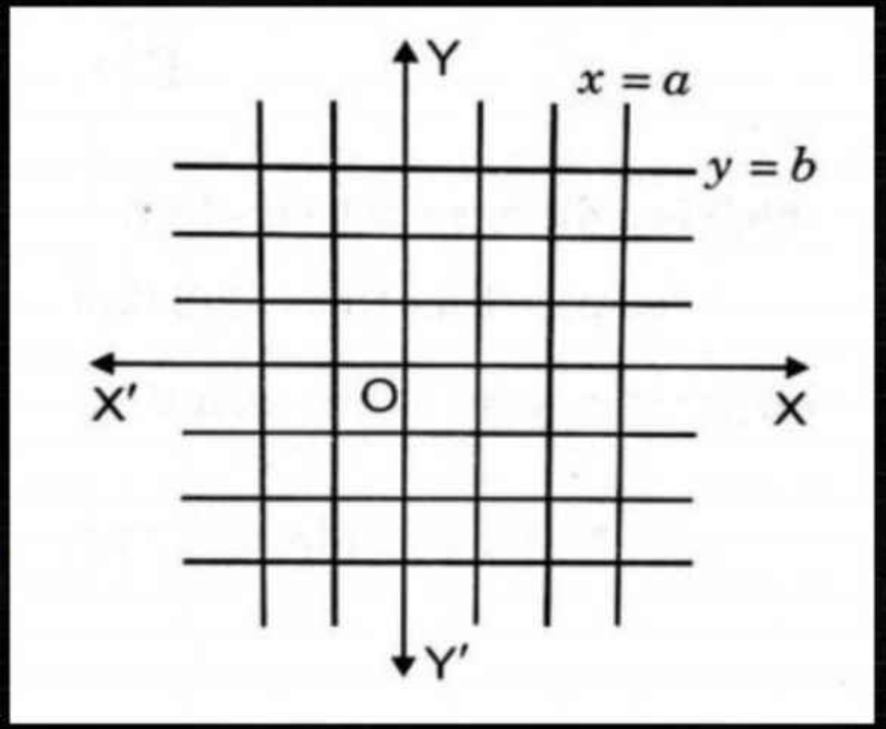
A curve is called orthogonal trajectory if it cuts every member of a given family of curves at right angles.

एक वक्र को ऑर्थोगोनल प्रक्षेप पथ कहा जाता है यदि वह दिए गए वक्र परिवार के प्रत्येक सदस्य को समकोण पर काटता है।

Example

Let for parameter $a, x = a$ is a family of straight lines parallel to y - axis and

मान लीजिए पैरामीटर a,x=a के लिए y-अक्ष के समानांतर सीधी रेखाओं का एक परिवार है और



Let for parameter $b, y = b$ is a another family of straight lines parallel to x - axis.

मान लीजिए पैरामीटर b,y=b के लिए x-अक्ष के समानांतर सीधी रेखाओं का एक और परिवार है।

Thus each member of family $x = a$ cuts every member of family $y = b$ at right angles, therefore these two curves $x = a$ and $y = b$ are said to be orthogonal trajectories.

इस प्रकार परिवार x=a का प्रत्येक सदस्य परिवार y=b के प्रत्येक सदस्य को समकोण पर काटता है, इसलिए इन दो वक्रों x=a और y=b को ऑर्थोगोनल प्रक्षेप पथ कहा जाता है।

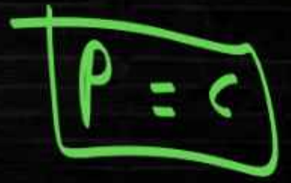
Working Rule

1. Let the equation of the family of given curves be $f(x, y, c) = 0$ (1) differentiate eq.....(1) w.r.t x.

दिए गए वक्रों के परिवार का समीकरण f(x,y,c)=0 मान लें (1) समीकरण .....(1) को x के संबंध में विभेदित करें।

2. Eliminate the arbitrary constant between the giyen equation and this derived equation.

दिए गए समीकरण और इस व्युत्पन्न समीकरण के बीच मनमाना स्थिरांक हटाएँ।



3. Replace $\frac{dy}{dx}$ by $-\frac{dx}{dy}$ in the equation obtained by above steps

उपरोक्त चरणों द्वारा प्राप्त समीकरण में $\frac{dy}{dx}$ को $-\frac{dx}{dy}$ से बदलें

4. Integrating the obtained equation and the resulting equation is the required equation of the family of orthogonal trajectories.

प्राप्त समीकरण और परिणामी समीकरण को एकीकृत करने पर ऑर्थोगोनल प्रक्षेप पथ के परिवार का आवश्यक समीकरण प्राप्त होता है।

Q. Soln of the differential Equn. $(y-px)^2 = 1+p^2$ is given by.

(a) $y = 2cx + \sqrt{1+c^2}$

(b) $y = -cx + \sqrt{1+c^2}$

(c) $y = cx + \sqrt{1+c^2}$

(d) $y = 3cx - \sqrt{1+c^2}$

$$y - px = \sqrt{1+p^2}$$

$$y = px + \sqrt{1+p^2}$$

$p = c$

$$y = cx + \sqrt{1+c^2}$$

Q. Sol^n of DE.

$$y = p(x-b) + \frac{a}{p}$$

$p = c$

(a) $y = c(x-b) + \frac{a}{c}$

(b) $y = c(x+b) + \frac{a}{c}$

(c) $y = c(x-b) + \frac{c}{a}$

(d) $y = c(x-b) + \frac{c}{b}$

$y = c(x-b) + \frac{a}{c}$ //

Ques Soln of D.E

$$p^2(x^2-a^2) - 2pxy + y^2 - b^2 = 0$$

(a) $y = cx \pm \sqrt{a^2c^2 - b^2}$

(b) $y = cx \pm \sqrt{c^2 + a^2b^2}$

(c) $y = cx \pm \sqrt{a^2c^2 - a^2b^2}$

(d) $y = cx \pm \sqrt{a^2c^2 + b^2}$

$$\hookrightarrow \quad y^2 - 2pxy + p^2x^2 - p^2a^2 - b^2 = 0$$

$$y = \frac{2px \pm \sqrt{4p^2x^2 - 4p^2x^2 + 4p^2a^2 + 4b^2}}{2}$$

$$y = \frac{2px \pm 2\sqrt{a^2p^2 + b^2}}{2}$$

$p = c$

$$y = cx \pm \sqrt{a^2c^2 + b^2} \quad //$$

Ques Soln of DE:

$$p = \log(px - y)$$

$$e^p = px - y$$

$$y = px - e^p$$

$p = c$

$$y = cx - e^c$$

b) $y = cx - e^c$

(b) $y = cx + e^c$

(c) $y = cx - 2e^c$

(d) $y = cx + 3e^c$

Q4 Soln of D.E.

$$\sin px.\cos y = \cos px.\sin y + p$$

(a) $y = cx + \sin^{-1}c$

(b) $y = cx - \cos^{-1}c$

(c) $y = cx - \tan^{-1}c$

(d) None.

$$\sin px.\cos y - \cos px.\sin y = p$$

$$\sin(px - y) = p$$

$$px - y = \sin^{-1}p$$

$$y = px - \sin^{-1}p$$

$p = c$

$$y = cx - \sin^{-1}c$$

Ques the orthogonal trajectory of family of curve.
$x^2+y^2=a^2$ is given by.

(a) $y=cx$

(b) $y=cx^2$

(c) $y^2=cx$

(d) $x^2+y^2=c^2$

↳ diff w.r.to x

$$2x+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}}$$

$$\int y\,dy=-\int x\,dx$$

$$y^2=-x^2+c$$

$$\boxed{x^2+y^2=c^2}$$

Q. Orthogonal trajectory in -

$px^2 + qy^2 = a^2$ —— p, q constant.

(a) $x^p = cy^q$

(b) $y^{-p} = cx^{-q}$

(c) $y^p = cx^{-q}$

(d) $y^p = cx^q$.

Ans