Ordinary differential Equation.

Exact Differential Equation

A differential equation is said to be exact differential equation, if it is obtained from its general solution directly by differentiation without any subsequent multiplication or elimination.

एक अवकल समीकरण को सटीक अवकल समीकरण कहा जाता है, यदि इसे इसके सामान्य हल से बिना किसी गुणन या विलोपन के सीधे अवकलन द्वारा प्राप्त किया जाता है।

In other words,

A differential equation is of the type $\boxed{Mdx + Ndy = 0}$, where M and N are functions of x and y, is said to be Exact differential Equation iff $\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$

एक अंतर समीकरण Mdx+Ndy=0 के प्रकार का होता है, जहाँ M और N, x और y के फलन हैं, इसे सटीक अंतर समीकरण कहा जाता है यदि और केवल यदि $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Ex $y^3 + x^3 = a$

diff.

$3y^2 dy + 3x^2 dx = 0 \longrightarrow$ Exact differential Eqn.

$$\boxed{N\,dy + M\,dx = 0}$$

$M = 3x^2, \quad N = 3y^2$

$\frac{dM}{dy} = 0, \quad \frac{dN}{dx} = 0$

$$\boxed{\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}}$$

For Examples:-

1. $ydx + xdy = 0$
2. $\sin x \cos y\, dy + \cos x \sin y\, dx = 0$

} Exact differential Equ^n.

$y.dx + xdy = 0$

$Mdx + Ndy = 0$

$M = y \quad N = x$

$\frac{dM}{dy} = 1 \quad \frac{dN}{dx} = 1$

$$\boxed{\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}}$$

$Ndy + Mdx = 0$

$N = \sin x . \cos y \; , \; M = \cos x . \sin y.$

$\frac{dN}{dx} = \cos y . \cos x \; , \; \frac{dM}{dy} \Rightarrow \cos x \cos y$

$$\boxed{\frac{dN}{dx} = \frac{dM}{dy}}$$

Solution of an Exact Differential Equation

If the equation $\boxed{Mdx + Ndy = 0}$ is exact, then its solution is given by

यदि समीकरण Mdx+Ndy=0 सटीक है, तो इसका हल इस प्रकार दिया जाता है

$$\boxed{\int Mdx + \int (\text{terms in } N \text{ not containing } x)dy = c} \quad$$ [redacted]

$\int Mdx + \int$ (N में x न रखने वाले पद)dy=c [redacted]

y को Constant

Note:-

Before to find the solution, firstly we have to check the condition of exactness. i.e $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

समाधान खोजने से पहले, सबसे पहले हमें सटीकता की स्थिति की जांच करनी होगी। यानी $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Example

Solve the differential Equation

अंतर समीकरण हल करें

$$(\underbrace{x^4 - 2xy^2 + y^4}_{M})dx - (\underbrace{2x^2y - 4xy^3 + \sin\ y}_{N})dy = 0$$

$$\boxed{\int_{y\ \text{constant}} M.dx + \int -\sin y\, dy = c}$$

$$\frac{x^5}{5} - \frac{2.y^2.x^2}{2} + y^4.x - (-\cos y) = c$$

$$\frac{x^5}{5} - x^2y^2 + xy^4 + \cos y = c$$ //

Differential Equation of First order but not of First degree

If $\frac{dy}{dx}$ be denoted by p, then the most general form of a differential equation of first order with n^{th} degree is given by $A_0p^n + A_1p^{n-1} + A_2p^{n-2} + \cdots A_{n-1}p + A_n = 0$, where $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ are functions of x and y.

यदि $\frac{dy}{dx}$ को p द्वारा दर्शाया जाए, तो nवें घात वाले प्रथम क्रम के अवकल समीकरण का सबसे सामान्य रूप $A_0p^n + A_1p^{n-1} + A_2p^{n-2} + \cdots A_{n-1}p + A_n = 0$ द्वारा दिया जाता है, जहाँ $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ x और y के फलन हैं।

$\frac{dy}{dx} = p$,

Working Rule

1. Put $\frac{dy}{dx} = p$ in the given differential equation.
   दिए गए अंतर समीकरण में $\frac{dy}{dx} = p$ रखें।
2. Make R.H.S zero and factorize L.H.S into linear factors of p.
   दायाँ पक्ष शून्य करें और बायाँ पक्ष p के रैखिक गुणनखंडों में विभाजित करें।
3. Equate each linear factor to zero and find their solutions taking constant c same in all solutions.
   प्रत्येक रैखिक गुणनखंड को शून्य के बराबर करें और सभी समाधानों में स्थिरांक c समान लेते हुए उनके समाधान ज्ञात करें।
4. Multiply all the solutions obtained in the above step and equate to zero for obtaining general solution of the given differential equation.
   उपरोक्त चरण में प्राप्त सभी समाधानों को गुणा करें और दिए गए अंतर समीकरण का सामान्य समाधान प्राप्त करने के लिए शून्य के बराबर करें।

Que Sol^n of D.E

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 5\cdot\frac{dy}{dx} + 6 = 0.$$

let $\frac{dy}{dx} = p$ < 2, 3

$$p^2 - 5p + 6 = 0$$

3×2

$$(p-3)(p-2) = 0$$

$$\boxed{p = 2, 3}$$

Case I

$$\frac{dy}{dx} = 2$$

$$\int dy = \int 2\,dx$$

$$y = 2.x$$

$$\boxed{y - 2x - c = 0}$$

Case II

$$\frac{dy}{dx} = 3$$

$$\int dy = \int 3\,dx.$$

$$y = 3x$$

$$\boxed{y - 3x - c = 0}$$

Requ sol^n $\Rightarrow$ $\boxed{(y-2x-c)(y-3x-c) = 0}$

Ans

Questions Practice

Q. The value of α, for which differential equation $(1+x^2y^3+\alpha x^2y^2)dx+(2+x^3y^2+x^3y)dy=0$ is exact?

α का मान क्या है, जिसके लिए अंतर समीकरण $\underbrace{(1+x^2y^3+\alpha x^2y^2)}_{M}dx+\underbrace{(2+x^3y^2+x^3y)}_{N}dy=0$ सटीक है?

(a) 3/2

(b) 2/3

(c) ½

(d) None of these

$$\boxed{\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}}$$

$$\frac{d}{dy}\,1+x^2y^3+ax^2y^2=\frac{d}{dx}\,2+x^3y^2+x^3y$$

$$\cancel{3x^2y^2}+\cancel{2ax^2y}=\cancel{3x^2y^2}+\cancel{3x^2y}$$

$$a=3/2$$

Q. Solution of the differential equation $\frac{2x}{y^3}dx + \left(\frac{y^2-3x^2}{y^4}\right)dy = 0$ **is**

अंतर समीकरण $\frac{2x}{y^3}dx + \left(\frac{y^2-3x^2}{y^4}\right)dy = 0$ **का हल है**

M, N

(a) $x^2 - y^2 = cy^2$

(b) $x^2 + y^2 = cy^3$

(c) $x^2 - y^2 = cy^3$

(d) $x^2 - y^3 = cy^3$

$\frac{dM}{dy} \Rightarrow \frac{2x \times -3}{y^4}$

$\frac{dM}{dy} = \frac{-6x}{y^4}$

$\frac{dN}{dx} = \frac{-6x}{y^4}$

=

$\int M dx + \int N dy = c$

y const

not x contain.

$\frac{1}{y^3} \times 2 \cdot \frac{x^2}{2} + \int \frac{\cancel{y^2}}{\cancel{y^4}_2} dy = c$

$\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{y} = c$

$\boxed{x^2 + y^2 = cy^3}$ Ans

Q. Solution of the differential equation $\frac{dy}{dx}+\frac{ax+hy+g}{hx+by+f}=0$ is

अंतर समीकरण $\frac{dy}{dx}+\frac{ax+hy+g}{hx+by+f}=0$ का हल है

(a) $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$

(b) $ax^2+2hxy+by^2=0$

(c) $2gx+2fy+c=0$

(d) None of these

Self