Rojgar with ankit

Exact Differential Equation :-

A differential equation is said to be exact differtial equation, if it is obtain from its genral solution directly by differtial without any subsquent multiplication or elimination.

एक अवकल समीकरण को सटीक अवकल समीकरण कहा जाता है, यदि इसे इसके सामान्य हल से बिना किसी गुणन या विलोपन के सीधे अवकलन द्वारा प्राप्त किया जाता है।

In Other Words :-

A differtial equation is of the type $Mdx + Ndy = 0$ where M and N are fn of x and y. is said to be a exact differtial equation iff $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

एक अंतर समीकरण $Mdx + Ndy = 0$ के प्रकार का होता है जहाँ M और N, x और y के फलन है, इसे सटीक अंतर समीकरण कहा जाता है यदि और केवल यदि $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Exp :- $y^3 + x^3 = 0$

diff. $3y^2dy + 3x^2dx = 0$ — Exact diff. equation.

$M = 3x^2$, $N = 3y^2$

$\frac{dM}{dy} = 0$, $\frac{dN}{\partial x} = 0$ ∴ $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$

For exam :-

1. $ydx + xdy = 0$

$= y \cdot dx + xdy = 0$

$= M = y \quad N = x$

$= \frac{dM}{dy} = 1 \quad \frac{dN}{dx} = 1$

$= \frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$

2. $\sin x \cos y dy + \cos x \sin y dx = 0$

$Mdxy + Mdx = 0$

$M = \sin x \cdot \cos y, \; N = \cos x \cdot \sin y$

$= \frac{dN}{dx} = \cos y \cdot \cos x$

$= \frac{dM}{dy} = \cos x \cdot \cos y$

$= \frac{dN}{dx} = \frac{dM}{dy}$

Solution of an exact differential Equation :-

If the equation $Mdx + Ndy = 0$ is exact, then its solution is given by —

यदि समीकरण $Mdx + Ndy = 0$ सही है, तो इसका हल इस प्रकार दिया जाता है।

$$\int Mdx + \int (\text{term in } N \text{ not containing } x)\, dy = C$$

$$\int Mdx + \int (N \text{ में } x \text{ न रखने वाले पद})\, dy = C$$

* Note :- Before to find the solution, firstly we have to check this condition of existence ie. $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

→ समाधान खोजने से पहले, सबसे पहले हमें सटीकता की जांच करनी होगी। यानी $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Exa 1 Solve this $\underbrace{(x^4 - 2xy^2 + y^4)}_{M} dx - \underbrace{(2x^2y - 4xy^3 + \sin y)}_{N} dy = 0$

$$\boxed{\int M dx + \int -\sin y \, dy = C}$$

→ $\frac{x^5}{5} - \frac{2 \cdot y^2 x^2}{2} + y^2 \cdot x - (-\cos y) = C$

→ $\frac{x^5}{5} - x^2y^2 + xy^2 + \cos y = C$

Differential Equation of first order but not to first degree

If $\frac{dy}{dx}$ be denoted by p, then the most general form of a differential equation of first order with nth. degree is given by $A_0p^n + A_1p^{n-1} + A_2p^{n-2} + \dots - A_{n-1}p + A_n = 0$ where $A_0 - A_1 - A_2 - A_n$ are fn of x and y.

यदि $\frac{dy}{dx}$ को p द्वारा दर्शाया जाय तो नये घात वाले प्रथम घ.स. के अवकल समीकरण का सबसे सामान्य रूप $A_0p^n + A_1p^{n-1} + A_2p^{n-2} + \dots + A_np + A_n = 0$ द्वारा दिया जाता है, जहां $A_0, A_1, A_2 \dots A_n$, x और y के फलन है।

Rojgar with ankit

Working Rule :-

1. Put $\frac{dy}{dx} = p$ in the given differential equation.

1) दिये गये समीकरण में $\frac{dy}{dx} = p$ रखें।

2. Make R.H.S. zero and factorize L.H.S. into linear factor p.

2) दायां पक्ष शून्य के और बायां पक्ष p के रैखिक गुणनखंडो में विभाजित करें।

3. Equate each linear factor to zero and find their solution. taking constant c same in all solution.

3) प्रत्येक रैखिक गुणनखंड को शून्य के बराबर करें, और सभी समाधानों में स्थिरांक c समान लेते हुए समाधान करें।

4. Multiply all the solutions obtained in the above step and equate to zero for obtaining genral solution of the given differential equation.

4) उपरोक्त चरण में प्राप्त सभी समाधानों को गुणा करें और दिये गये अंतर समीकरण का सामान्य समाधान प्राप्त करने के लिये शून्य के बराबर करें।

Q. Soln of D.E. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 5\cdot\frac{dy}{dx} + 6 = 0$

Sol :- Let $\frac{dy}{dx} = p$

$p^2 - 5p + 6 = 0$

$-3 \times -2 = +6$

$(p-3)(p-2) = 0$

$p = 2, 3$

Rojgar with ankit

Case I

$$\frac{dy}{dx} = 2$$

$$\int dy = \int 2\,dx$$

$$y = 2x$$

$$y - 2x - c = 0$$

Case II

$$\frac{dy}{dx} = 3$$

$$\int dy = \int 3\,dx$$

$$y = 3x$$

$$y - 3x - c = 0$$

So $\boxed{(y-2x-c)(y-3x-c)=0}$ Ans

Q. The value of a, which diff. equation $(1+x^2y^3+ax^2y^2)dx + (2+x^3y^2+x^3y)dy = 0$ is exact?

→ a का मान क्या है, जिसके लिये अंतो समीकरण सटीक है?

(a) 3/2 ✓

(b) 2/3

(c) 1/2

(d) None.

Sol $\boxed{\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}}$

$$\frac{d}{dy}(1+x^2y^3+ax^2y^2) = \frac{d}{dx}(2+x^3y^2+x^3y)$$

$$3x^2y^2 - 2ax^2y = 3x^2y^2 + 3x^2y$$

$$\boxed{a = \frac{3}{2}}$$ Ans

Q. Solution of the diff equation

$$\frac{2x}{y^3}dx + \left(\frac{y^2-3x^2}{y^4}\right)dy = 0$$ is

(a) $x^2-y^2=cy^2$

(b) $x^2+y^2=cy^3$ (✓)

(c) $x^2-y^2=cy^3$

(d) $x^2-y^3=cy^3$

Sol $\frac{dM}{dy}=\frac{2x\,(-3)}{y^4}$

$\frac{dM}{dy}=\frac{-6x}{y^4}$

$\frac{dN}{dx}=\frac{-6x}{y^4}$ ⟹

$\int_y M\,dx+\int N\,dy=0$ (Not x contain)

$\frac{1}{y^3}\cdot\frac{2x^2}{2}+\int\frac{y^2}{y^4}\,dy=c$

$\frac{x^2}{y^3}+\frac{1}{y}=c$

$x^2+y^2=cy^3$ Ans

Q. Solution of diff equation $\frac{dy}{dx}+\frac{ax+hy+g}{hx+by+f}=0$ is

⇒ (H.W).