

Partial differential Equation



Today → Concepts + Theorem + Results.

Tomorrow → Questions practice.

Partial Differentiation

Let f be a function of two independent variables x and y . The partial derivative of f with respect to x (regarding y as constant) is the function denoted by f_x defined as $f_x(x, y) = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\delta x, y) - f(x, y)}{\delta x}$ provided the limit exists.

मान लीजिए कि f दो स्वतंत्र चर x और y का एक फ़ंक्शन है। x के संबंध में f का आंशिक व्युत्पन्न (y को स्थिर मानते हुए) f_x द्वारा दर्शाया गया फ़ंक्शन है जिसे $f_x(x, y) = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\delta x, y) - f(x, y)}{\delta x}$ के रूप में परिभाषित किया गया है बशर्ते सीमा मौजूद हो।

$$\frac{df}{dx}$$

Similarly,

The partial derivative of f with respect to y (regarding x as constant) is the function denoted by f_y defined as $f_y(x, y) = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \delta y) - f(x, y)}{\delta y}$ provided the limit exists.

y के संबंध में f का आंशिक व्युत्पन्न (x को स्थिर मानते हुए) f_y द्वारा दर्शाया गया फंक्शन है जिसे $f_y(x, y) = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{(f(x, y + \delta y) - f(x, y))}{\delta y}$ के रूप में परिभाषित किया गया है बशर्ते सीमा मौजूद हो।

$$\downarrow$$
$$\frac{df}{dy}$$

Results:-

✓ 1. $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} \right) = y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{y}{x^2}$

✓ 2. $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial y} (y) = \frac{1}{x}$

✓✓ 3. If $z = uv$, where u and v are functions of x and y , then $\frac{\partial z}{\partial x} =$

$$\frac{\partial}{\partial x} (uv) = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} \text{ and } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (uv) = u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y}$$

यदि $z=uv$, जहाँ u और v , x और y के फलन हैं, तो $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (uv) = u \frac{\partial v}{\partial x} +$

$$v \frac{\partial u}{\partial x} \text{ और } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (uv) = u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y}$$

4. If $z = f(u)$, where u is a function of x and y , then $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du} \frac{\partial u}{\partial x}$

and $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du} \frac{\partial u}{\partial y}$

यदि $z=f(u)$, जहाँ u , x और y का एक फलन है, तो $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du} \frac{\partial u}{\partial x}$ और $\frac{\partial z}{\partial y} =$

$$\frac{dz}{du} \frac{\partial u}{\partial y}$$

Example

If $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, then find $\frac{\partial z}{\partial x}$ and $\frac{\partial z}{\partial y}$

यदि $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, तो $\frac{\partial z}{\partial x}$ और $\frac{\partial z}{\partial y}$ ज्ञात कीजिए

$$z = (x^2+y^2)^{-1/2}$$

diff w.r to x

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2} (x^2+y^2)^{-3/2} \times 2x$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

diff w.r to y

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{1}{2} (x^2+y^2)^{-3/2} \times 2y$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Homogenous Functions

(समरूप फंक्शन)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

A function $f(x, y)$ is said to be a homogenous function of **order** n , if the degree of each of its terms in x and y is equal to n .

नोट

एक फंक्शन $f(x, y)$ को क्रम n का एक समरूप फंक्शन कहा जाता है, यदि x और y में इसके प्रत्येक पद की घात n के बराबर हो।

Ex $x^2 + xy + y^2 \rightarrow (x \text{ व } y \text{ की घात बराबर})$

order (नोट) = 2

In other words,

Any function which can be expressed in the form $x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$ is called a homogenous function in x and y of order n .

कोई भी फंक्शन जिसे $x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, x और y में क्रम n का समरूप फंक्शन कहलाता है।

Ex $x^2 + xy + y^2$

$$x^2 \left[1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} \right]$$

$$= x^2 f\left(\frac{y}{x}\right) \text{ order-2,,}$$

Examples:-

✓ 1. $ax^2 + 2hxy + by^2$ is a homogenous function of order 2.

$ax^2 + 2hxy + by^2$ क्रम 2 का एक समरूप फलन है।

✓ 2. $u = \frac{x^3 + y^3}{x - y} = x^2 \left(\frac{1 + \frac{y^3}{x^3}}{1 - \frac{y}{x}} \right)$ is a function of the form $x^2 f\left(\frac{y}{x}\right)$, which

is homogenous function of order 2 .

$u = \frac{x^3 + y^3}{x - y} = x^2 \left(\frac{1 + \frac{y^3}{x^3}}{1 - \frac{y}{x}} \right)$ $x^2 f\left(\frac{y}{x}\right)$ के रूप का एक फलन है, जो क्रम 2 का

समरूप फलन है।

3. $u = \sin^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$ is a homogenous function of degree of 0 which can be written as $x^0 f \left(\frac{y}{x} \right)$

$u = \sin^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$ 0 की घात का एक समरूप फलन है जिसे $x^0 f \left(\frac{y}{x} \right)$ के रूप में लिखा जा सकता है

Theorems OR Properties

- ① If u is a homogenous function of degree n in x and y , then both $\frac{\partial u}{\partial x}$ and $\frac{\partial u}{\partial y}$ are also homogenous functions of degree $n - 1$ each.

यदि u , x और y में n डिग्री का एक समरूप फलन है, तो $\frac{\partial u}{\partial x}$ और $\frac{\partial u}{\partial y}$ दोनों भी $n-1$ डिग्री के समरूप फलन हैं।

①. let $u = x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$.

diff w.r to x

$$\frac{dy}{dx} = x^n f'\left(\frac{y}{x}\right) \times \frac{-y}{x^2} + n x^{n-1} f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{n-1} \left[\frac{-y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) + n f\left(\frac{y}{x}\right) \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{n-1} \cdot \underline{g\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$n-1$ $\rightarrow$ order
degree.

diff w.r to y .

$$\frac{dy}{dy} = x^n \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} \cdot x^1$$

$$\frac{dy}{dy} = x^{n-1} g\left(\frac{y}{x}\right)$$

$n-1 \rightarrow$ degree

2. Euler's Theorem on Homogenous Functions

समरूप फलनों पर यूलर का प्रमेय

If u is a homogenous function of degree n in x and y , then $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = nu.$

यदि u , x और y में n डिग्री का एक समरूप फलन है, तो $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = nu.$

$$\textcircled{2} \text{ let } u = x^n f\left(\frac{y}{x}\right). \text{ --- } \textcircled{1}$$

diff w.r to x

$$x \cdot \frac{du}{dx} = x' x^{n-1} \left[-\frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) + n f\left(\frac{y}{x}\right) \right]$$

$$x \cdot \frac{du}{dx} = x^n \cancel{x^{-1}} f'\left(\frac{y}{x}\right) + n x^n f\left(\frac{y}{x}\right). \text{ --- } \textcircled{2}$$

diff w.r to y .

$$y \frac{du}{dy} = y \cdot x^n f'\left(\frac{y}{x}\right) \times \frac{1}{x}$$

$$y \cdot \frac{du}{dy} = x^n f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y}{x} \text{ --- } \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} + \textcircled{3}$$

$$x \cdot \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} \Rightarrow n \underbrace{x^n f\left(\frac{y}{x}\right)}_u$$

$$x \cdot \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} = nu$$

3. Relation between second order derivatives of homogenous functions

समरूप फलनों के द्वितीय क्रम व्युत्पत्तियों के बीच संबंध

If u is a homogenous function of degree n in x and y , then

यदि u , x और y में n डिग्री का एक समरूप फलन है, तो

✓ i. $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (n - 1) \frac{\partial u}{\partial x}$

✓ ii. $y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (n - 1) \frac{\partial u}{\partial y}$

✓ iii. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n - 1)u.$