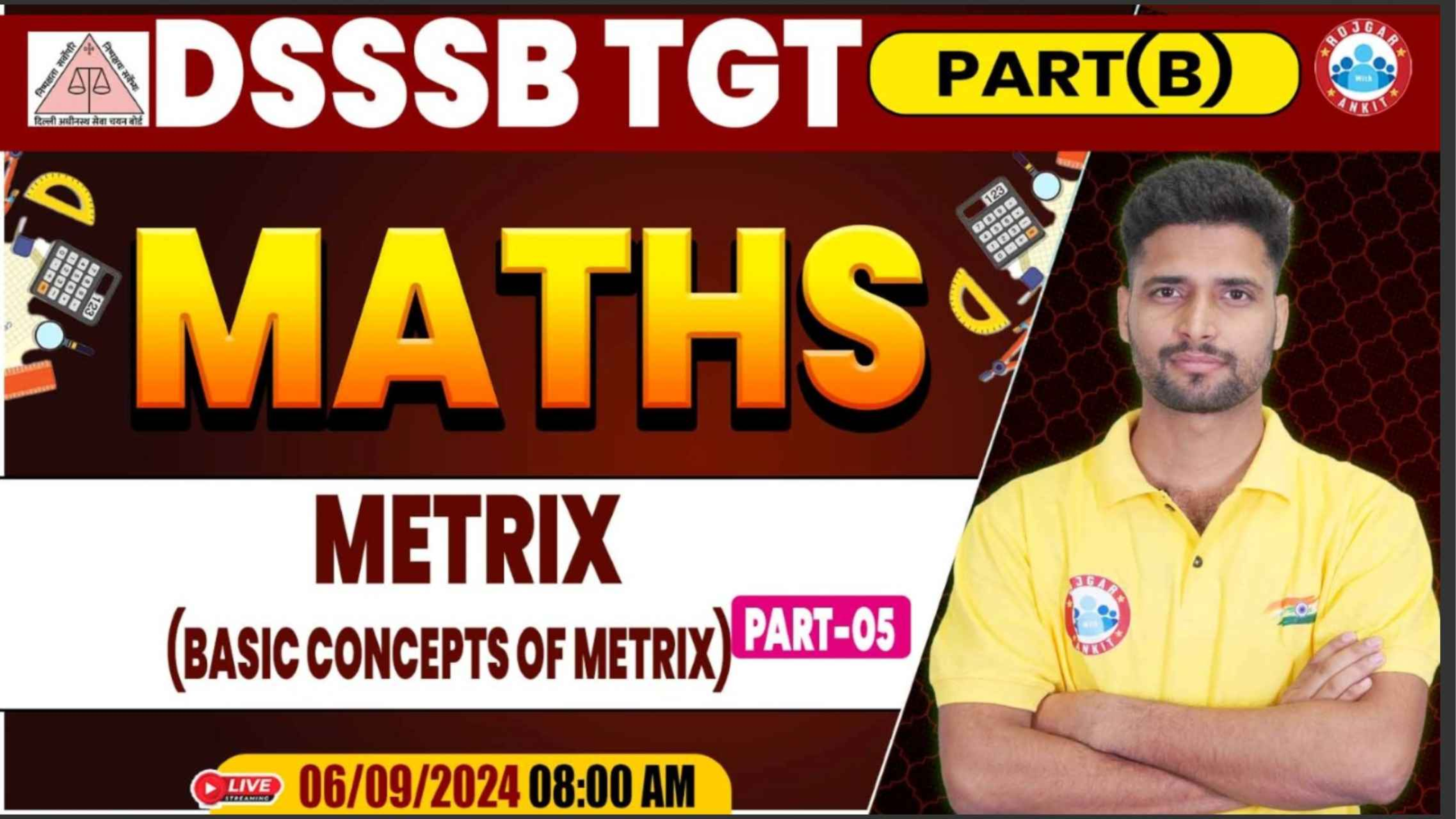

दिल्ली अधीनस्थ सेवा चयन बोर्ड
DSSSB TGT
PART(B)
ROJGAR WITH ANKIT
MATHS
METRIX
(BASIC CONCEPTS OF METRIX)
PART-05
LIVE STREAMING
06/09/2024 08:00 AM

# SEQUENCES IN METRIC SPACES

**Sequences in Metric Spaces :** - Let $(X, d)$ be a metric space.

A sequence of points of X is a function $f$ from $\mathbb{N}$ onto $X$.

मान लीजिए (X,d) एक मीट्रिक स्पेस है। X के बिंदुओं का अनुक्रम N से X पर एक फलन f है।

$f : N \to X$

Real

Domain

Co-domain

Natural no

It's denoted by $\{x_n\}$ or $(x_n)$

$\{x_n\} \Rightarrow \frac{1}{n} \Rightarrow 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

$\{x_n\} = \frac{1}{n^2} \Rightarrow 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$

**Convergence of Real Sequences in Metric Space:-** Let $(X, d)$ be a metric space and $\{x_n\}$ be a sequence in $X$. An element $x \in X$ is called a limit of $\{x_n\}$ if for every $\varepsilon > 0$, $\exists$ a +ve integer $n_0$ such that $\boxed{d(x_n, x) < \varepsilon,}\ \forall n \geqslant n_0$

मीट्रिक स्पेस में वास्तविक अनुक्रमों का अभिसरण:- मान लें कि (X,d) एक मीट्रिक स्पेस है और $\{x_n\}X$ में एक अनुक्रम है। एक तत्व x∈X को $\{x_n\}$ की सीमा कहा जाता है यदि प्रत्येक ε>0 के लिए, ∃ एक +ve पूर्णांक $n_0$ है जैसे कि $\boxed{d(x_n, x) < \varepsilon,}\ \forall n \geqslant n_0$

$\{x_n\} \longrightarrow x$

$d(x_n, x) < \varepsilon$

**Theorem-1. A sequence can have at most/one limit/point, equivalently limit of a sequence, if it exists, is unique.**

**प्रमेय-1. एक अनुक्रम में अधिकतम/एक सीमा/बिंदु हो सकता है, समतुल्य रूप से अनुक्रम की सीमा, यदि वह मौजूद है, तो अद्वितीय है।**

if seq is convergent then its limit point is unique.

Q. Which of the following statements best illustrates unique Limit point of sequence if it Exist?

निम्नलिखित में से कौन सा कथन अनुक्रम के अद्वितीय सीमा बिंदु को सबसे अच्छी तरह से दर्शाता है यदि वह मौजूद है?

$\{x_n\} \longrightarrow a \qquad \{x_n\} \longrightarrow b$

A) If a sequence $(x_n)$ converges to two different limits a and $b$, then $a = b$.

B) If a sequence $(x_n)$ has more than one limit point, then the sequence is divergent.

C) If a sequence $(x_n)$ converges, the limit of the sequence is always zero.

D) A sequence can have multiple limit points if it is bounded and oscillatory.

**Theorem-2.** $X_n \to \mathrm{x}$ **iff** $d(X_n, \mathrm{x}) \to 0$ **in** $\mathbb{R}$

**प्रमेय-2.** $X_n \to x$ **यदि और केवल यदि R में** $d(X_n, x) \to 0$ **हो**

$$\boxed{d(x_n - n) < \varepsilon \quad \forall \; n_0 \le n}$$

Q. In the Usual Metric space $(\mathbb{R}, d)$ sequence $(x_n)$ converges to $x$

सामान्य मीट्रिक स्पेस (R,d) में अनुक्रम $(x_n)x$ में परिवर्तित होता है

a) $|x_n| = 0$

b) iff $|x| \to 0$

c) if $|x_n - x_m| \to 0$

d) iff $|x_n - x| \to 0$

$\{x_n\} \to x$

$d(x,y) = |x-y|$

$d(x_n, x) \to 0$

$d(x_n - x) < \varepsilon$

$d(x,y) \Rightarrow |x_n - x| \to 0$

# Cauchy Sequences in Metric Spaces

**Cauchy Sequence: -** Let $d$ be a metric on $X$. A sequence $\{x_n\}$ in $X$ is said to be a Cauchy sequence if for every $\varepsilon > 0$, there exists a positive integer $p$ such that $d(x_n, x_m) < \varepsilon \forall n, m \geqslant p$.

कॉंची अनुक्रम: - मान लें कि d, X पर एक मीट्रिक है। X में एक अनुक्रम $\{x_n\}$ को कॉंची अनुक्रम कहा जाता है यदि प्रत्येक ε> 0 के लिए, एक सकारात्मक पूर्णांक p मौजूद होता है जैसे कि $d(x_n, x_m) < \varepsilon \forall n, m \geqslant p$।

$d(x_n, x_m) < \varepsilon$

distance

$d|x_n - x_m| < \varepsilon$

$\langle x_n \rangle = \frac{1}{n}$

$\langle x_m \rangle = \frac{1}{m}$

$d(x_n, x_m) < \varepsilon$

$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{m-n}{nm}\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{m-n}{nm}\right| = \left|\frac{n-m}{nm}\right| \leq \left|\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}m}\right|$

$\boxed{|x_n - x_m| < \frac{1}{m} < \varepsilon}$

**Theorem-3. Every convergent Sequence in a Metric Space is Cauchy, but converses is not true.**

**प्रमेय-3. मीट्रिक स्पेस में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम कॉची है, लेकिन इसका विपरीत सत्य नहीं है।**

Q. Let $(X, d)$ be a metric space and $(x_n)$ be a sequence in $X$. Which of the following statements is true?

मान लीजिए (X,d) एक मैट्रिक स्पेस है और $(x_n) X$ में एक अनुक्रम है। निम्नलिखित में से कौन सा कथन सत्य है?

A) Every Cauchy sequence in a metric space is convergent.

B) Every convergent sequence in a metric space is Cauchy.

C) There exists a Cauchy sequence in a metric space that is not bounded.

D) In a complete metric space, every convergent sequence is not necessarily Cauchy.

**Sequentially Continuous:** A function $f$ is sequentially continuous if for every convergent sequence $(x_n)$ in $X$ with limit $x$, the sequence $(f(x_n))$ converges to $f(x)$ in $Y$.

Sequential continuity is a weaker condition than continuity.

अनुक्रमिक रूप से सतत: एक फलन f अनुक्रमिक रूप से सतत होता है यदि सीमा x के साथ X में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम $(x_n)$ के लिए, अनुक्रम $(f(x_n))Y$ में f(x) में अभिसरित होता है। अनुक्रमिक निरंतरता निरंतरता की तुलना में एक कमज़ोर स्थिति है।

Note: In metric spaces, continuity implies sequential continuity.

नोटः मीट्रिक स्पेस में, निरंतरता का अर्थ अनुक्रमिक निरंतरता है।

If $f$ is continuous at $x \in X$, then for any sequence $(x_n)$ converging to $x$, $f(x_n)$converges to $f(x)$.

यदि f x∈X पर सतत है, तो x में अभिसरित होने वाले किसी भी अनुक्रम $(x_n)$ के लिए, $f(x_n) f(x)$ में अभिसरित होता है।

$f(x_n) \to f(x)$

## Completion of a Metric Space

**Complete Metric Space:** A metric space $(x, d)$ is said to be complete if every Cauchy sequence in $X$ converges in $X$.

पूर्ण मैट्रिक स्पेस: एक मैट्रिक स्पेस (x,d) को पूर्ण कहा जाता है यदि X में प्रत्येक कॉची अनुक्रम X में अभिसरित होता है।

limit point of converge sequence
in X is belong to X.

Q. Which of the following statements is true regarding the (completeness) of the usual metric space $(\mathbb{R}, d)$ ?

सामान्य मैट्रिक स्पेस (R,d) की पूर्णता के संबंध में निम्नलिखित में से कौन सा कथन सत्य है?

A) Every bounded sequence in $(\mathbb{R}, d)$ has a convergent subsequence.

B) Every Cauchy sequence in $(\mathbb{R}, d)$ converges to a limit in $\mathbb{R}$.

C) Every sequence in $(\mathbb{R}, d)$ converges to a point in $\overline{\mathbb{R}}$.

D) Every sequence in $(\mathbb{R}, d)$ is bounded.

# Completion of a Metric Space

Q. Is the space of complex numbers $\mathbb{C}$ with the metric defined as $d(z, \omega) = |z - \omega|$ complete?

क्या जटिल संख्या C का स्थान, जिसकी मीट्रिक d(z,ω)=|z-ω| के रूप में परिभाषित है, पूर्ण है?

Complex

A) Yes

B) No

C) Yes, because every bounded sequence in $\mathbb{C}$ has a convergent subsequence.

D) No, because there are unbounded sequences in $\mathbb{C}$.

Note:

1. Every Cauchy Sequence in $\mathbb{C}$ converges in $\mathbb{C}$, Then $\mathbb{C}$ is Complete Metric Space.

C में प्रत्येक कॉची अनुक्रम C में अभिसरित होता है, तो C पूर्ण मीट्रिक स्पेस है।

2. Every Cauchy Sequence in $\mathbb{R}$ converges in $\mathbb{R}$, Then $\mathbb{R}$ is Complete Metric Space.

R में प्रत्येक कॉची अनुक्रम R में अभिसरित होता है, तो R पूर्ण मीट्रिक स्पेस है।

3. The set $X$ of Rational Numbers w.r.t usual metric is Not Complete Metric Space

सामान्य मीट्रिक के संबंध में परिमेय संख्याओं का सेट X पूर्ण मीट्रिक स्पेस नहीं है

4. Every Discrete Metric on $X$, Then $(X, d)$ is Complete Metric Space.

X पर प्रत्येक असतत मीट्रिक, तो (X,d) पूर्ण मीट्रिक स्पेस है।

Note :

$\nearrow$ n tupple

5. The set $\mathbb{R}^n$ is complete w.r.t. the Euclidean Metric

सेट $R^n$ यूक्लिडियन मीट्रिक के संबंध में पूर्ण है

6. Cauchy Sequence $\{f_n\}$ in $\beta(s)$ converges to $f \in \beta(s) \Rightarrow \beta(s)$ is complete.

β(s) में कॉची अनुक्रम $\{f_n\} f \in \beta(s) \Rightarrow \beta(s)$ पर अभिसरित होता है, जो पूर्ण है।

7. The set $X$ of irrational Numbers w.r.t usual metric is Not Complete Metric Space

सामान्य मीट्रिक के संबंध में अपरिमेय संख्याओं का सेट X पूर्ण मीट्रिक स्पेस नहीं है

8. Let $(X, d)$ be a metric space and let A be a subset of $X$

मान लें (X,d) एक मीट्रिक स्पेस है और A को X का उपसमुच्चय मान लें

if $A$ is closed then $A$ is also Complete

यदि A बंद है तो A भी पूर्ण है

Q. Which of the following metric space is not complete?

निम्नलिखित में से कौन सा मैट्रिक स्पेस पूर्ण नहीं है?

A. set of rationals.

B. set of real numbers

C. set of complex numbers

D. set of irrationals

Q. Let $(X, d)$ be a metric space and let $B$ be a subset of $X$ then if $B$ is closed then $B$ is also

मान लें (X,d) एक मैट्रिक स्पेस है और B, X का उपसमुच्चय है, तो यदि B बंद है तो B भी है

A. unbounded

B. compact

C. bounded

D. complete

Q. A metric space $X$ is said to be complete if

एक मैट्रिक स्पेस X को पूर्ण कहा जाता है यदि

A. if every convergent sequence in it is bounded

B. if every Cauchy sequence in $X$ converges in $X$

C. if Cauchy sequence in X is not convergent

D. if every Cauchy sequence in X has more than 2 convergent subsequences

Q. In metric space, if the function $f$ is continuous, then

मैट्रिक स्पेस में, यदि फलन f निरंतर है, तो

A. f is sequentially continuous.

B. f is differentiable.

C. f is onto.

D. $f$ is uniformly continuous.

Q. If $d(x,y) = (x-y)^2$ then which of the following is true

यदि $d(x,y) = (x-y)^2$ तो निम्न में से कौन सा सत्य है:

A. 'd' is not metric on $R$.

B. 'd' does not satisfy symmetric properly.

C. d' satisfies triangle inequality.

D. 'd' is metric on $R$.

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$(x-y)^2 \leq (x-z)^2 + (z-y)^2$

not satisfied

(I). $d(x,y) \Rightarrow (x-y)^2 \geq 0$

(II) $d(x,y) = (x-y)^2 = 0 \therefore x = y$

(III) $d(x,y) = d(y,x)$