



DSSSB TGT

PART(B)



MATHS

METRIX

(BASIC CONCEPTS OF METRIX)

Practice
Part - 2



05/09/2024 08:00 AM



1. Let (X, d) be a metric space, then which condition must be satisfied by metric space (X, d) ?

मान लीजिए (X, d) एक मैट्रिक स्पेस है, तो मैट्रिक स्पेस (X, d) द्वारा कौन सी शर्त पूरी होनी चाहिए?

- ✗ (a) $d(x, y) = 0$ iff $x = 0 \rightarrow x=y$
- ✓ (b) $d(x, y) = d(y, x) \rightarrow \text{Symmetric}$
- ✗ (c) $d(x, y) < 0$
- ✗ (d) $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$

2. A function that defines a concept of distance between any two members of set which are usually called points is:-

एक फ़ंक्शन जो सेट के किसी भी दो सदस्यों के बीच दूरी की अवधारणा को परिभाषित करता है जिन्हें आमतौर पर बिंदु कहा जाता है: -

☒ (a) determinant

☒ (b) a set

☒ (c) open set

☒ (d) metric space

3. To verify that (S, d) is a metric space we should first check that if $d(x, y) = 0$ then:-

यह सत्यापित करने के लिए कि (S, d) एक मैट्रिक स्पेस है, हमें पहले यह जांचना चाहिए कि यदि $d(x, y) = 0$ है तो:-

- ✓(a) $x = y$
- ✗(b) $y = 0$
- ✗(c) $x = 0$
- ✗(d) $y = -1$

4. The symmetric property in a metric space is

मीट्रिक स्पेस में सममित गुण है

(a) $d(x, y) = 0$

(b) $d(x, y) < 0$

✓ (c) $d(x, y) = d(y, x)$

(d) $d(x, y) > 0$

5. In metric space which function is always continuous?

मैट्रिक स्पेस में कौन सा फ़ंक्शन हमेशा निरंतर रहता है?

(a) discrete function

(b) bounded function

(c) continuous function

✓(d) distance function

6. If we are given two overlapping sets A and B in metric space then what can we say about $d(\bar{A}, B)$?

यदि हमें मैट्रिक स्पेस में दो अतिव्यापी सेट A और B दिए गए हैं तो हम $d(\bar{A}, B)$ के बारे में क्या कह सकते हैं?

(a) finite

(b) infinity

(c) doesn't exist

✓ (d) zero

$$x=y$$

$$d(A, B) = 0$$

7. Let (X, d) be a metric space then what can you say about X and d ?

मान लीजिए (X, d) एक मैट्रिक स्पेस है तो आप X और d के बारे में क्या कह सकते हैं?

- ✓ A. d is called metric and X is called ground set
- ✗ B. both are called ground sets
- ✗ C. d is called metric but can't say about X
- ✗ D. X is called metric and d is called ground set,

$d(x, y)$ Set
distance. $d(x, y)$ - metri space.

8. Which property is (not)satisfied by metric space?

कौन सा गुण मैट्रिक स्पेस द्वारा संतुष्ट नहीं होता है?

A. monotonicity

B. non- negativity $d(x, y) \geq 0$

C. symmetry $\rightarrow d(x, y) = d(y, x)$

D. identification $\rightarrow x = y$
 $d(x, y) = 0$

$\checkmark \rightarrow$ Triangle Inequality

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

9. Given set X and a function $d: X \times X \rightarrow R$ we say that the pair $M = (x, d)$ is a –

दिए गए सेट X और एक फ़ंक्शन $d: X \times X \rightarrow R$ पर हम कहते हैं कि युग्म $M = (x, d)$ एक –

A. Euclidean distance

B. a set

C. vector space

D. metric space ✓✓

10. Let $X = \mathbb{R}$ $d(x, y) = |x - y|$, then (X, d) is
मान लीजिए $X = \mathbb{R}$ $d(x, y) = |x - y|$, तो (X, d) है

a) Need not Metric Space

✓ b) Metric Space

c) Semi Metric not Metric

d) None of these

①. $d(x, y) = |x - y| \geq 0$

②. $d(x, y) = |x - x| = 0 \quad \therefore x = y$

③. $d(x, y) = d(y, x)$

$$|x - y| = |y - x|$$

④. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$$

11. Let (X, d) be a metric space, Let $f: X \rightarrow X$ be one to one map. Let $D(x, y) = d(f(x), f(y))$, $\forall x, y \in X$. Then D is a metric on X ?

मान लीजिए (X, d) एक मैट्रिक स्पेस है, मान लीजिए $f: X \rightarrow X$ एक से एक मैप है। मान लीजिए $D(x, y) = d(f(x), f(y))$; $\forall x, y \in X$. तो D, X पर एक मैट्रिक है?

$$\text{I. } D(x, y) \rightarrow d[f(x), f(y)] \geq 0$$

$$\text{II. } D(x, y) \rightarrow f(x) = f(y) = 0$$

$$\text{III. } d(f(x), f(y)) = d(f(y), f(x))$$

$$\text{IV. } d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(z)) + d(f(z), f(y))$$

yes metric space

12. The space of all bounded sequences. Let X be the set of all bounded sequences of numbers, i.e., all infinite sequences

सभी परिबद्ध अनुक्रमों का स्थान। मान लीजिए X संख्याओं के सभी परिबद्ध अनुक्रमों का समुच्चय है, अर्थात् सभी अनंत अनुक्रम

$$\underline{x = (x_1, x_2, \dots) = \{x_i\}_{i \geq 1}}$$

such that

Summation $\leftarrow \sup_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty.$

If $x = \{x_i\}_{i \geq 1}$ and $y = \{y_i\}_{i \geq 1}$ belong to X , we introduce the distance

$$d(x, y) = \sup_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|$$

यदि $x = \{x_i\}_{i \geq 1}$ और $y = \{y_i\}_{i \geq 1}$ X से संबंधित हैं, तो हम दूरी $d(x, y) =$

$$\sup_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|$$

✓ I) $d(x, y) \Rightarrow |x_i - y_i| \geq 0$

✓ II) $d(x, y) \Rightarrow |x_i - y_i| = 0 : x_i = y_i$

✓ III) $d(x, y) = d(y, x)$

$$|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$$

✓ IV) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

$$|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$$

yes, it's metric space.

13. Let S be any nonempty set and $\mathcal{B}(S)$ denote the set of all bounded real-valued (or complex-valued) functions on S , i.e.,

मान लें कि S कोई रिक्त समुच्चय है और $\mathcal{B}(S)$ S पर सभी परिबद्ध वास्तविक-मान (या जटिल-मान) फलनों के समुच्चय को दर्शाता है, अर्थात्,

$$\mathcal{B}(S) = \left\{ f: S \rightarrow \mathbb{R} : \sup_{x \in S} |f(x)| < \infty \right\}$$

we Define

$$d(f, g) = \sup_{x \in S} |f(x) - g(x)|, f, g \in \mathcal{B}(S)$$

✓ I). $d(f, g) \Rightarrow |f(x) - g(x)| \geq 0$

✓ II). $d(f, g) \Rightarrow |f(x) - g(x)| = 0 : f(x) = g(x)$

✓ III). $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$

✓ IV). $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$
 $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$

Let X be the set of all continuous functions defined on $[a, b]$, an interval in $\mathbb{R}$. For $f, g \in X$, define

मान लें कि $X, \mathbb{R}$ में एक अंतराल $[a, b]$ पर परिभाषित सभी निरंतर कार्यों का समूह है। $f, g \in X$ के लिए, परिभाषित करें

$$d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

close interval

modulus.

⊕ A funⁿ which is continou. on closed interval is bounded.

Always represent a metric space.

Let X be the set of all continuous functions on $[a, b]$

Define $d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

मान लें कि $X, [a, b]$ पर सभी सतत कार्यों का समुच्चय है, $d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ को परिभाषित करें

yes metric space

① $f(x), g(x)$ are continuous on $[a, b]$

② $f - g$ is continuous on $[a, b]$

③ $f - g$ is bounded on $[a, b]$

④ $|f - g|$ is bounded / Integrable on $[a, b]$

14. Let X be the set of all real valued bounded continuous function defined on the closed interval $[0,1]$.

मान लें कि X बंद अंतराल $[0,1]$ पर परिभाषित सभी वास्तविक मान वाले परिबद्ध सतत फ़ंक्शन का सेट है।

Define $d: X \times X \rightarrow R$ by $d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$, for all $f, g \in X$ then $d(f, g)$ is

$d: X \times X \rightarrow R$ को $d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$ द्वारा परिभाषित करें, सभी $f, g \in X$ के लिए तो $d(f, g)$ है

a) Need not Metric Space

✓ b) Metric Space on X

c) Semi Metric not Metric

d) None of these

15. Let $X = \mathbb{R}$ & $d(x, y) = |x^2 - y^2|$, then d is

मान लें $X = \mathbb{R}$ & $d(x, y) = |x^2 - y^2|$ तो d है

a) Not Semi Metric Space

b) Metric Space on $\mathbb{R}$

c) Pseudo metric ✓

d) None of these

→ $d(x, y) = 0 \quad \therefore x = y$

✓ If $x = y$, $d(x, y) = 0$

I) $d(x, y) \Rightarrow |x^2 - y^2| \geq 0$

II) $d(x, y) \Rightarrow |x^2 - y^2| = 0 :$

$x^2 = y^2$

$x = \pm y$

$x = y$ ✓✓

$x = -y$ ✗

III) ✓

IV) ✓

16. Let $R[0,1]$ denote the class of all Riemann integrable function f from $[0,1]$ into R .

मान लीजिए $R[0,1]$, $[0,1]$ से R तक सभी रीमैन इंटीग्रेबल फंक्शन f के वर्ग को दर्शाता है।

Consider the mapping $d: R[0,1] \times R[0,1] \rightarrow R$

मैपिंग $d: R[0,1] \times R[0,1] \rightarrow R$ पर विचार करें

Defined by $d(f, g) = \int_0^1 |f - g|(x) dx = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$

Show that d is Pseudo metric on $R[0,1]$ which is not a metric

$d(f, g) = \int_0^1 |f - g|(x) dx = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$ द्वारा परिभाषित। दिखाएँ कि d , $R[0,1]$ पर छद्म मीट्रिक है जो एक मीट्रिक नहीं है

a) Not Semi Metric Space

b) Metric Space on R

c) Pseudo metric

d) None of these

Home-work

17. (Minkowski's Inequality) Let $x_i \geq 0$ and $y_i \geq 0$ for $i = 1, 2, \dots, n$ and suppose that $p \geq 1$. Then

(मिन्कोवस्की असमानता) मान लीजिए $x_i \geq 0$ और $y_i \geq 0$ जहां $i=1,2,\dots,n$ है और मान लीजिए $p \geq 1$ है। तो

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{1/p}$$

(Minkowski's Inequality for Infinite Sums) Suppose that $p \geq 1$ and let $\{x_n\}_{n \geq 1}, \{y_n\}_{n \geq 1}$ be sequences of nonnegative terms such that $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p$ and $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^p$ are convergent. Then $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)^p$ is convergent. Moreover,

(अनंत योगों के लिए मिन्कोवस्की की असमानता) मान लीजिए कि $p \geq 1$ है और $\{x_n\}_{n \geq 1}, \{y_n\}_{n \geq 1}$ गैर-ऋणात्मक पदों के अनुक्रम हैं जैसे कि $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p$ और $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^p$ अभिसारी हैं। तो $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)^p$ अभिसारी है। इसके अलावा,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n^p\right)^{1/p}$$

18. Let $X = \mathbb{R}^n$ = set of all n tuples in $\mathbb{R}$ $R = \left\{ \left(\underline{x_1, x_2, x_3 \cdots x_n} \right) : x_i \in \mathbb{R} \right\}$ For $x, y \in \mathbb{R}^n$, defines $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$; $\forall x, y \in X$, Then d is a metric on $\mathbb{R}^n$?

चलो $X = \mathbb{R}^n$ = सभी n ट्यूपल्स का सेट है $R = \left\{ \left(\underline{x_1, x_2, x_3 \cdots x_n} \right) : x_i \in \mathbb{R} \right\}$ For $x, y \in \mathbb{R}^n$, के लिए, $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$; $\forall x, y \in X$, Then d परिभाषित करता है, तो d $\mathbb{R}^n$ पर एक मीट्रिक है?

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (|x_i - y_i|^2) \right)^{1/2}$$

This is Minkowski Inequality.
This is metric space.