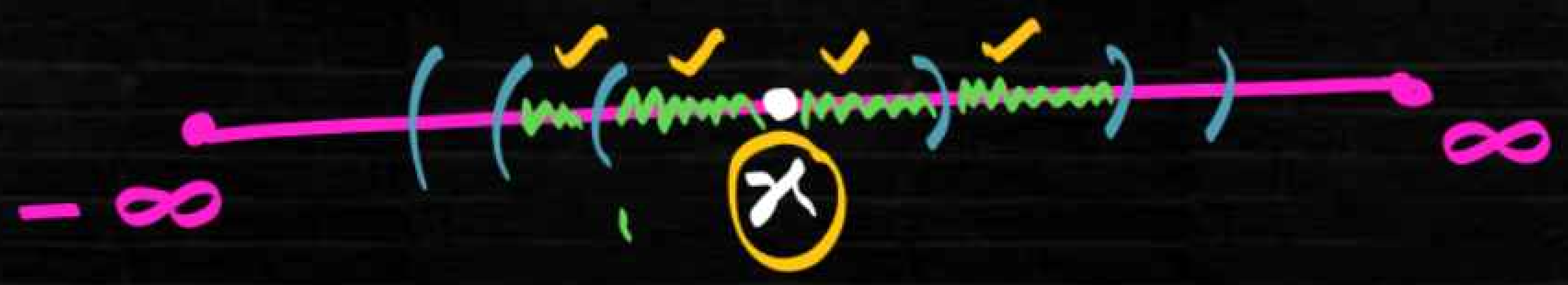

DSSSB TGT
PART(B)
MATHS
METRIC SPACES
(BASIC CONCEPTS OF METRIC SPACES)
(PRACTICE)
LIVE
03/09/2024 08:00 AM



Limit point

$A \subseteq X, \ x \in X$

Let (X, d) be a metric space and let A be a subset of X. A point $x \in X$ is said to be limit point of A if every open sphere, centred on x contains atleast one point of A other than x.

मान लीजिए (X,d) एक मैट्रिक स्पेस है और A, X का एक उपसमुच्चय है। एक बिंदु x∈X को A का सीमा बिंदु कहा जाता है यदि x पर केन्द्रित प्रत्येक खुला गोला, x के अलावा A का कम से कम एक अन्य बिंदु समाहित करता है।

$S_r(a)$

$a \to$ Center

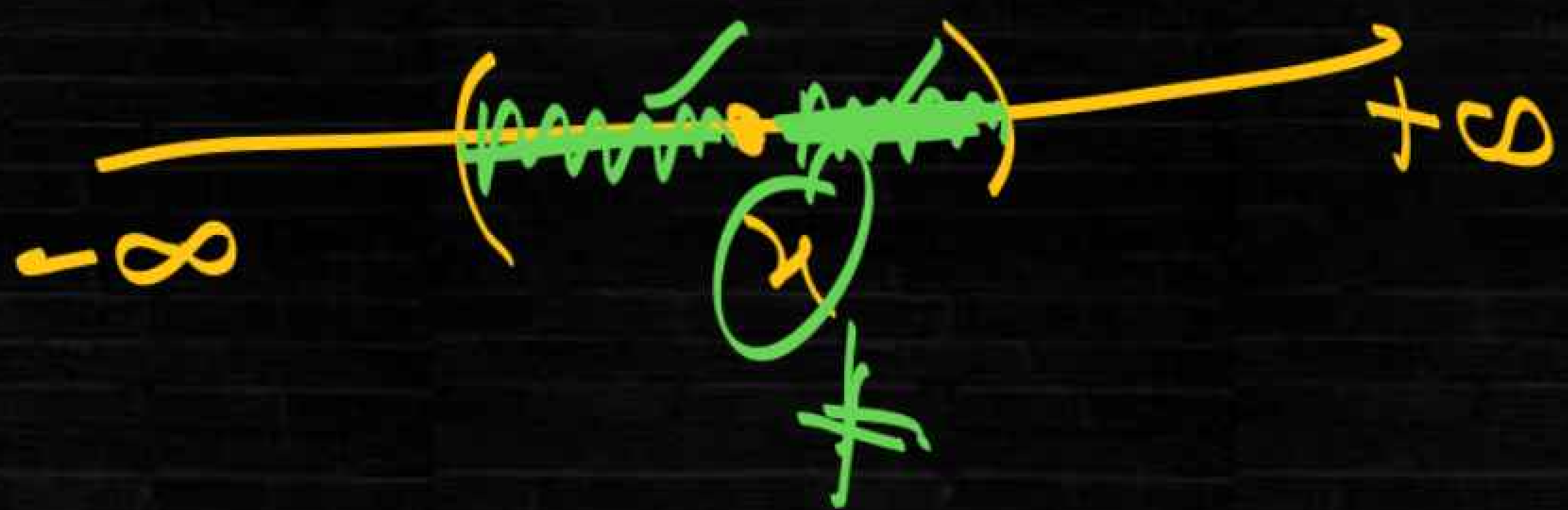
$r \to$ radius

only x then no limit point

In other words,

A point $x \in X$ is said to be limit point of a subset A of X , if for every real number $r > 0$, there exists an open sphere $S_r(x_1)$ such that $\boxed{A \cap S_r(x) - \{x\} \neq \emptyset}$

एक बिंदु x∈X को X के उपसमुच्चय A का सीमा बिंदु कहा जाता है, यदि प्रत्येक वास्तविक संख्या r>0 के लिए एक खुला गोला $S_r(x_1)$ मौजूद हो जैसे कि $\boxed{A \cap S_r(x) - \{x\} \neq \emptyset}$



Note:- $x \in X$, $x \notin X$

The limit point may or may not belong to the set. This point is also called a cluster point or Accumulation point. In other words,

सीमा बिंदु सेट से संबंधित हो भी सकता है और नहीं भी। इस बिंदु को क्लस्टर बिंदु या संचय बिंदु भी कहा जाता है। दूसरे शब्दों में,

Examples:-

$A \subseteq \mathbb{R}$

इसके बीच के rational होंगे।

1. The set of integers Z has no limit point.

पूर्णांकों के समुच्चय Z का कोई सीमा बिंदु नहीं है।

$A \cap S_1(0) - \{0\}$

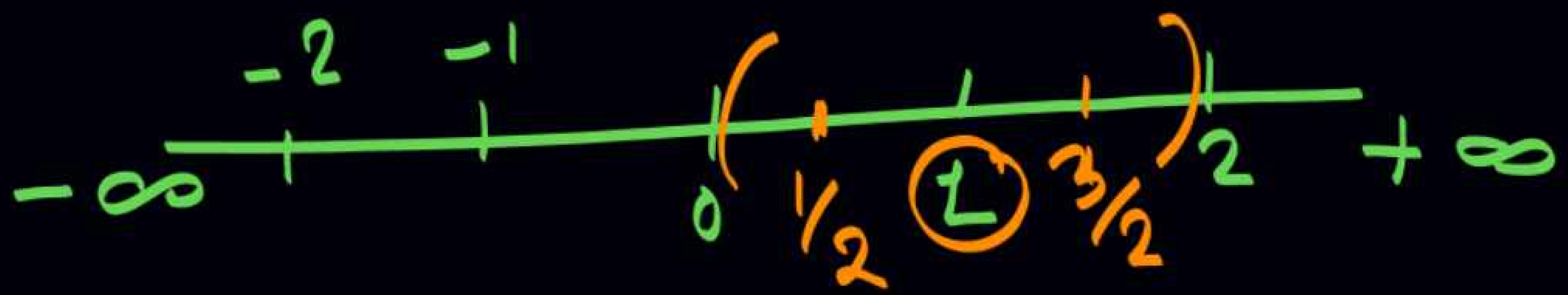
$Z \cap (-1, 1) - \{0\}$

$\{0\} - \{0\} = \phi$

no limit point.

2. The set of rationals has every real number as its limit point.

परिमेय संख्याओं के समुच्चय का प्रत्येक वास्तविक संख्या सीमा बिंदु है।



Conti → $S_{1/2}(1) = \left\{ x \in Z \,,\, d(x,1) < \frac{1}{2} \right\}$

Ou → $S_r(x) = \{x, y \in R \,.\, |x-y| < r\}$

$r = \frac{1}{2}$

$|x-1| < \frac{1}{2}$

$1 - \frac{1}{2} < x - 1 + 1 < \frac{1}{2} + 1$

$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$

$\overset{\subseteq Z}{A} \cap S_{1/2}(1) - \{1\}$

$\{1\} - \{1\}$

ϕ no limit

Derived set

$A \subseteq X$

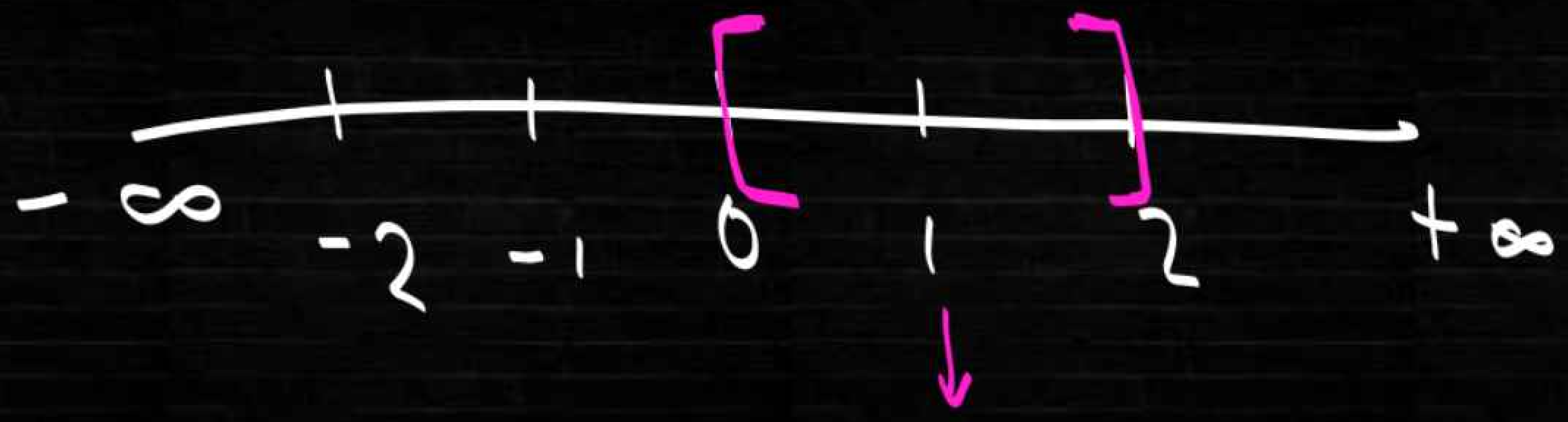
Let (X, d) be a metric space and A be any subset of X. Then the set of all limit points of A is called derived set of A. It is denoted by $d(A)$ or A'

मान लीजिए (X,d) एक मैट्रिक स्पेस है और A, X का कोई उपसमुच्चय है। तब A के सभी सीमा बिंदुओं के समुच्चय को A का व्युत्पन्न समुच्चय कहा जाता है। इसे d(A) या A' द्वारा दर्शाया जाता है।

Closed Set

A subset F of a metric space (X, d) is said to be closed if and only if its complement $\boxed{X - F = F^c}$ is open.

मैट्रिक स्पेस (X,d) के उपसमुच्चय F को बंद तभी कहा जाता है जब उसका पूरक $X - F = F^c$ खुला हो।



In other words,

A subset F of a metric space (X, d) is said to be closed if it contains all its limit points. Thus F is closed if $d(F) \subseteq F$.

मीट्रिक स्पेस (X,d) का उपसमुच्चय F बंद कहा जाता है यदि इसमें उसके सभी सीमा बिंदु शामिल हों। इस प्रकार F बंद है यदि d(F)⊆F.

Examples:-

Every closed intervals like $[2,5]$ and $[0,3]$ are closed sets.

प्रत्येक बंद अंतराल जैसे [2,5] और [0,3] बंद सेट हैं।

Results OR Properties

1. In any metric space (X, d), the empty $\emptyset$ and X are closed sets.
किसी भी मैट्रिक स्पेस (X,d) में, खाली ø और X बंद सेट हैं।

2. In a metric space (X, d), every closed sphere is a closed set,
मैट्रिक स्पेस (X,d) में, प्रत्येक बंद गोला एक बंद सेट है,

3. In a metric space, the intersection of arbitrary collection of closed sets is closed.
मैट्रिक स्पेस में, बंद सेटों के मनमाने संग्रह का प्रतिच्छेदन बंद है।

4. In a metric space, the union of a finite number of closed sets is closed.
मैट्रिक स्पेस में, बंद सेटों की एक सीमित संख्या का संघ बंद है।

Practice

1 Q. Let (X, d) be metric space, then the property $d(x, y) = d(y, x)$ for all $x, y \in X$, represents

मान लें कि (X,d) मैट्रिक स्पेस है, तो सभी x,y∈X के लिए गुण d(x,y)=d(y,x) दर्शाता है

2nd a) two points can coincide definite $\boxed{x=y}$ $d(x,y)=0$

1st b) distance function is always non-negative. $\rightarrow d(x,y) \geq 0$

4th c) the triangle inequality. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

d) the distance function does not depend on the order

$d(x,y) = d(y,x) \rightarrow$ Symmetric 3rd //

(2)

Q. A metric space (X, d), where $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y \\ 1 & \text{if } x \neq y \end{cases}$ for all $x, y \in X$ is

एक मैट्रिक स्पेस (X,d), जहाँ $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{यदि } x = y \\ 1 & \text{यदि } x \neq y \end{cases}$ सभी x,y∈X के लिए है

a) bounded

b) discrete metric space

c) both (a) and (b) ✓

d) unbounded

finite distance. (Bounded).

↓

✓ dicrete metric space

Q. Let (X,d) be a metric space, if there exists a real number $k > 0$ such that $d(x,y) \leq k$ for all $x, y \in X$, then (X,d) is

मान लें (X,d) एक मैट्रिक स्पेस है, यदि कोई वास्तविक संख्या $\boxed{k>0}$ मौजूद है जैसे कि $\boxed{d(x,y)\leq k}$ सभी x,y∈X के लिए, तो (X,d) है

a) bounded

close space

finite distance.

b) unbounded

c) both (a) and (b)

$[0,k] \to$ Bounded

d) none of these

Q. If r be the radius with centered at $z_0 = (x_0, y_0) \in R^2$ then $S_r(z_0) = \{z \in R^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2\}$ represents a

यदि r त्रिज्या है जिसका केंद्र $z_0 = (x_0, y_0) \in R^2$ है तो $S_r(z_0) = \{z \in R^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2\}$ निम्न में से क्या दर्शाता है?

a) open disc

b) closed disc

c) open ball → open sphere. $\{x \in R, d(x, a) < r\}$

d) none of these

close ball → close sphere $\{x \in R, d(x, a) \leq r\}$

Q. If A and B are subsets of a metric space (X, d), then which one is not correct?

यदि A और B एक मीट्रिक स्पेस (X,d) के उपसमुच्चय हैं, तो कौन सा सही नहीं है?

a) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

b) If $A \subseteq B$, then $A^\circ \subseteq B^\circ$

c) $A^\circ \cup B^\circ = (A \cup B)^\circ$

d) $A^\circ \subset A$

Check

Q. If d be the usual metric $d(x,y) = |x-y|$ for $x, y \in [0,1]$, then $S_{\frac{1}{8}}(0)$ is given by

यदि $\boxed{x,y \in [0,1]}$ के लिए d सामान्य मीट्रिक $d(x,y)=|x-y|$ है, तो $S_{\frac{1}{8}}(0)$ द्वारा दिया जाता है

$S_{1/8}(0) = \{x \in [0,1] : d(x,y) = |x-y|\}$

a) $\left[0, \frac{1}{8}\right]$

b) $\left(0, \frac{1}{8}\right]$

c) $\left[0, \frac{1}{8}\right)$

d) $\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$

$|x-0| < \frac{1}{8}$

$-\frac{1}{8} < x < \frac{1}{8}$

$0 \leq x < \frac{1}{8}$

Q. Let (R, d) be a usual metric space, then which one of the following set is not a nbd of 1.

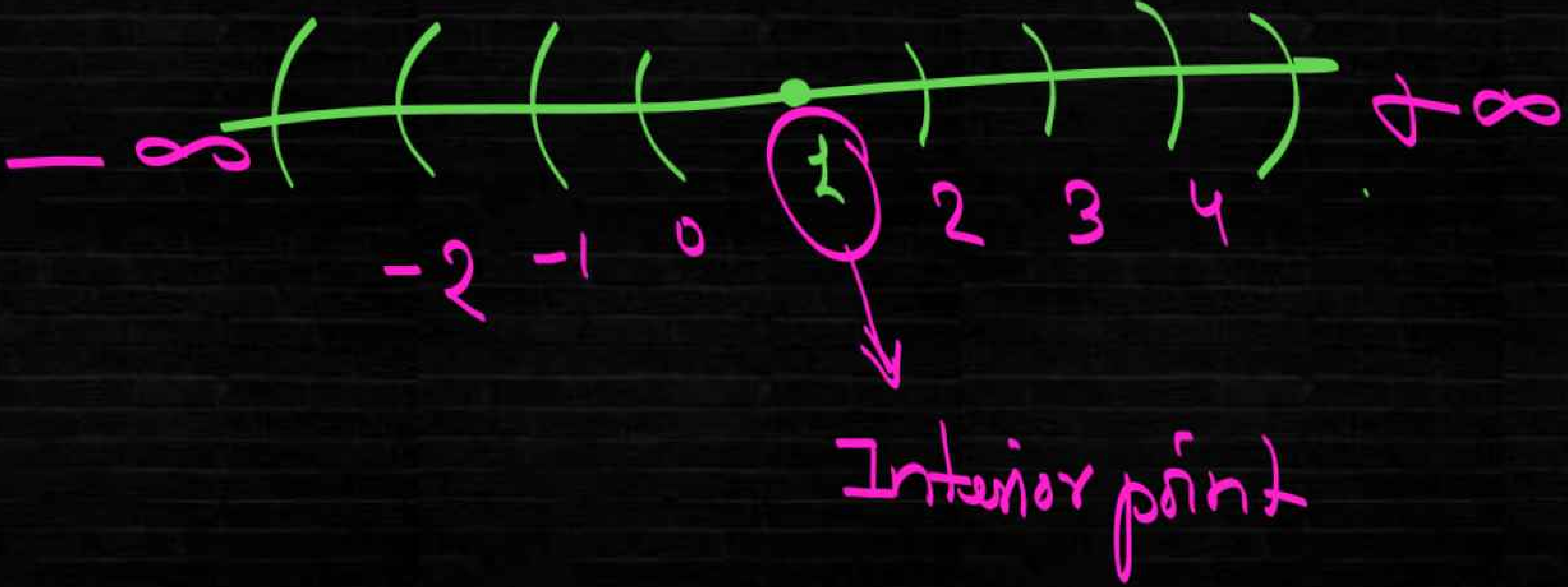
मान लीजिए (R,d) एक सामान्य मैट्रिक स्पेस है, तो निम्नलिखित में से कौन सा सेट 1 का nbd नहीं है।

a) (0,2)

b) [0,1]

c) R

d) (0,3)



Q. Which one of the following is not correct?

निम्नलिखित में से कौन सा सही नहीं है?

a) In a metric space (X, d), the empty $\emptyset$ is open set.

b) In a metric space (X, d), the X is closed set.

c) The set of integers Z has no limit point.

d) None of these

Q. Let (R, d) be the usual metric space, then the derived set of $A = \left\{\frac{1}{n}; n \in N\right\}$ is

मान लीजिए (R,d) एक सामान्य मैट्रिक स्पेस है, तो $A = \left\{\frac{1}{n}; n \in N\right\}$ का व्युत्पन्न सेट है

a) $\{0,1\}$

b) $\{1\}$

c) $\{0\}$

d) $\emptyset$

Self

Q. Which one of the following is true?

निम्नलिखित में से कौन सा सही है?

a) The set of all limit points of a set is called derived set

b) Set F is closed only if F^c is open

c) derived set is always a closed set

d) All of above