
DSSSB TGT
PART(B)
MATHS
METRIC SPACES
(BASIC CONCEPTS OF METRIC SPACES) PART-03
LIVE
02/09/2024 08:00 AM

Semi - Metric Space (pseudo-metric space)

A metric space (X, d) consists of a non-empty set X and a function $d: X \times X \to R$ such that.

एक मीट्रिक स्पेस (X,d) एक गैर-रिक्त सेट X और एक फलन d:X×X→R से मिलकर बना होता है।

distance funⁿ

1. $d(x, y) \geq 0$ for all $x, y \in X$
2. If $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$ for all $x, y \in X$; $\longleftrightarrow$ $d(x,y) = 0$ iff $x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$ for all $x, y \in X$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ for all $x, y, z \in X$ is known as semi-metric space.

Note:-

Every metric space is always a semi-metric space but converse need not to be true.

प्रत्येक मीट्रिक स्पेस हमेशा एक अर्ध-मीट्रिक स्पेस होता है, लेकिन इसका विपरीत सत्य होना आवश्यक नहीं है।

finite distance

Infinite distance.

Bounded and unbounded Metric Spaces

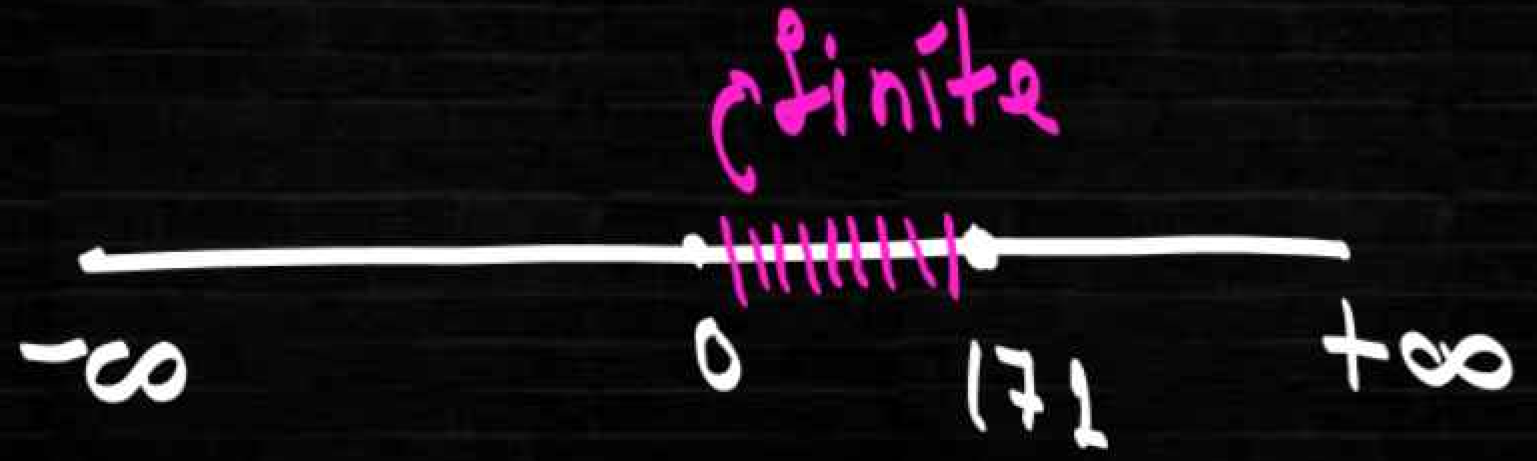
Let (X, d) be a metric space, then it is said to be bounded if there exists a real number $k > 0$ such that $d(x, y) \leq k$ for all $x, y \in X$

मान लें कि *(X,d)* एक मैट्रिक स्पेस है, तो इसे बाउंडेड कहा जाता है यदि कोई वास्तविक संख्या *k>0* मौजूद हो जैसे कि *d(x,y)≤k* सभी *x,y∈X* के लिए

And a metric space which is not bounded is said to be unbounded metric space.

और एक मैट्रिक स्पेस जो परिबद्ध नहीं है उसे अप्रतिबंधित मैट्रिक स्पेस कहा जाता है।

$\boxed{k > 0}$



Examples

1. Let $X = R$ and $d(x, y) = |x - y|$ for all $x, y \in X$. This metric space is unbounded, since the diameter of R is infinite → Unbounded

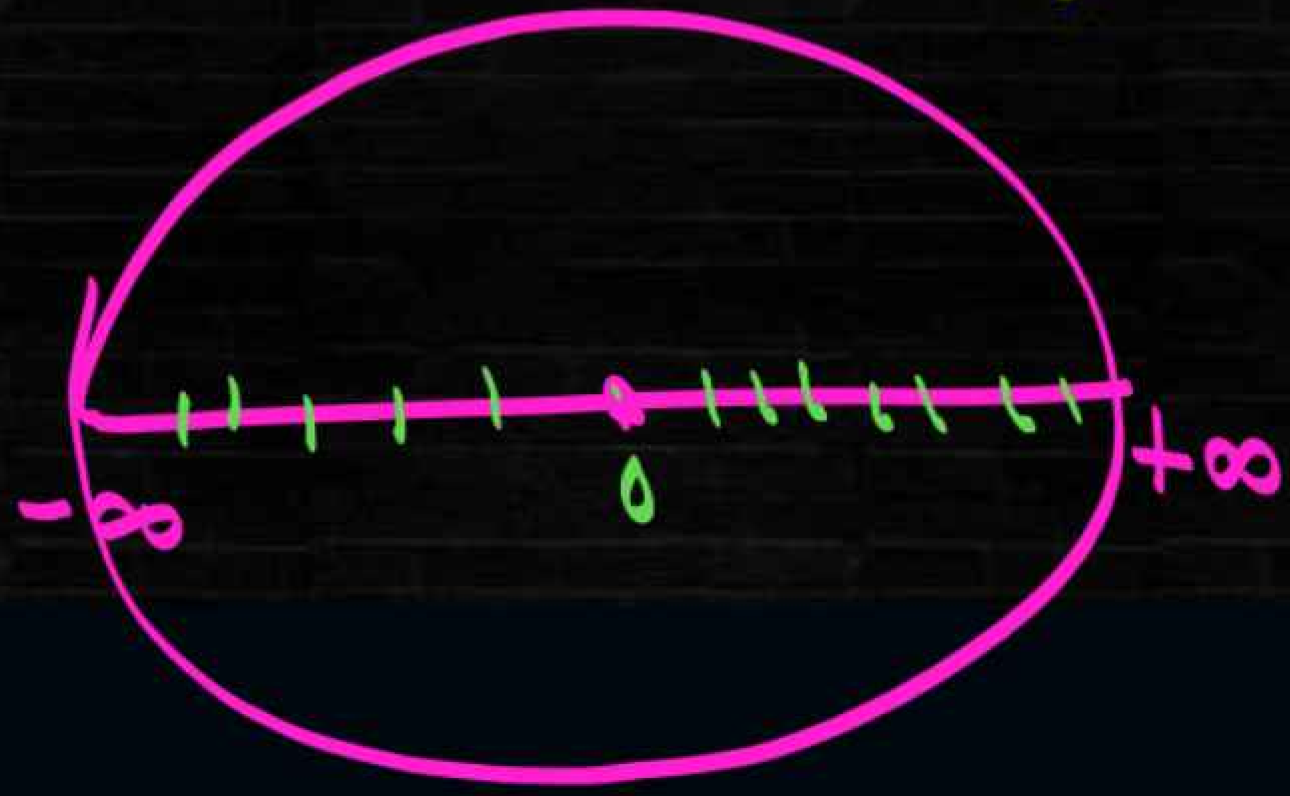
मान लीजिए X=R और d(x,y)=|x-y| सभी x,y∈X के लिए। यह मैट्रिक स्पेस असीमित है, क्योंकि R का व्यास अनंत है

finite (Bounded)

2. A discrete metric space (X, d), where $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y \\ 1 & \text{if } x \neq y \end{cases}$ is bounded, since $d(x, y) \leq 1$ for all $x, y \in X$.

एक असतत मैट्रिक स्पेस (X,d), जहाँ $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y \\ 1 & \text{if } x \neq y \end{cases}$ सीमित है, क्योंकि d(x,y)≤1 सभी x,y∈X के लिए।

$0 \leq d(x,y) \leq 1$

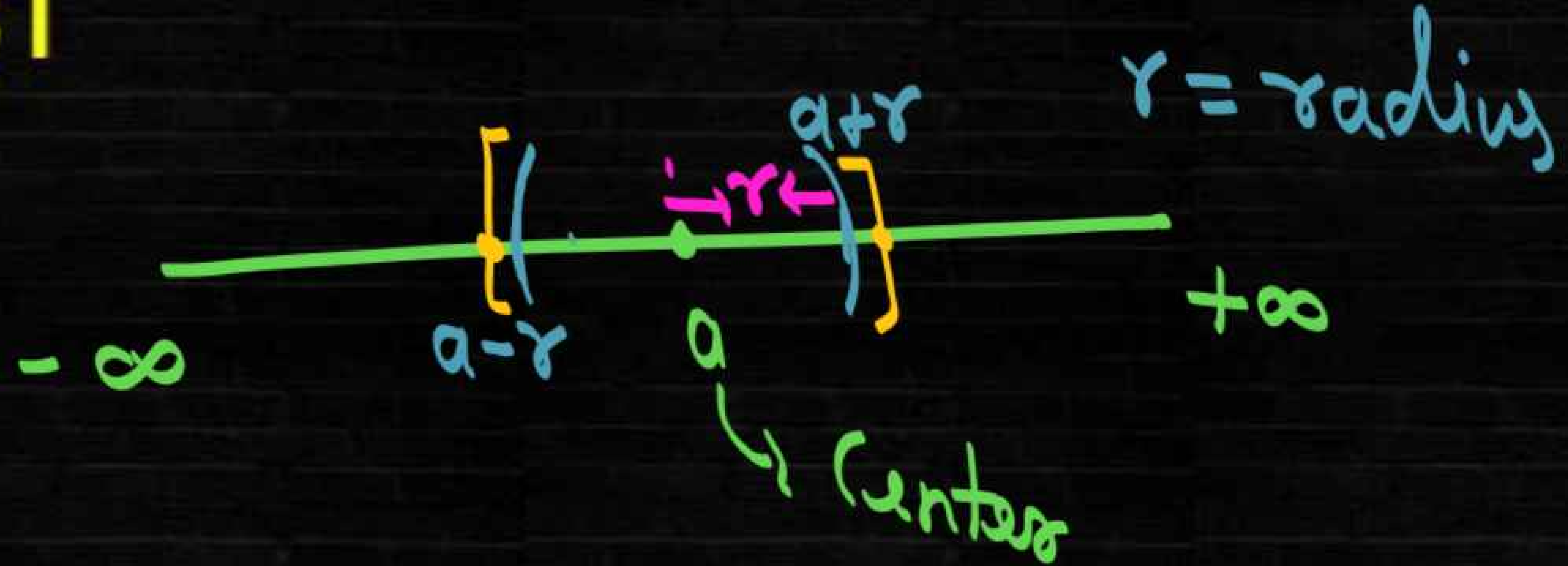


Open Sphere.

Real No

Let (X, d) be a metric space. Also let $a \in X$ and $\boxed{r > 0}$ be any real number. Then the set $\{x \in X : d(x, a) < r\}$ is called an open sphere. It is also known as an open ball. radius Center

मान लीजिए (X,d) एक मैट्रिक स्पेस है। साथ ही मान लीजिए a∈X और r>0 कोई भी वास्तविक संख्या है। तब सेट {x∈X:d(x,a)<r} को एक खुला गोला कहा जाता है। इसे एक खुली गेंद के रूप में भी जाना जाता है।



Note:-

The point ' a ' is called the centre of the sphere and ' r ' is the radius of the sphere. It is denoted by $S_r(a)$ or $S(a,r)$ or $B_r(a)$ or $B(a,r)$.
बिंदु 'a' को गोले का केंद्र कहा जाता है और 'r' गोले की त्रिज्या है। इसे $S_r(a)$ या $S(a,r)$ या $B_r(a)$ या B(a,r) द्वारा दर्शाया जाता है।

Mathematically, $S_r(a) = \{x \in X: d(x,a) < r\}$.
गणितीय रूप से, $\boxed{S_r(a) = \{x \in X: d(x,a) < r\}}$

Closed Sphere

Let (X, d) be a metric space. Also let $a \in X$ and $r > 0$ be any real number. Then the set $\{x \in X: d(x, a), \leq r\}$ is called a closed sphere. It is also known as a closed ball.

मान लीजिए (X,d) एक मैट्रिक स्पेस है। साथ ही मान लीजिए a∈X और r>0 कोई भी वास्तविक संख्या है। तब सेट {x∈X:d(x,a),≤r} को बंद गोला कहा जाता है। इसे बंद गेंद के नाम से भी जाना जाता है।

Note:-

The point ' a ' is called the centre of the sphere and ' r ' is the radius of the sphere. It is denoted by $S_r[a]$ or $S[a,r]$ or $B_r[a]$ or $B[a,r]$

बिंदु 'a' को गोले का केंद्र कहा जाता है और 'r' गोले की त्रिज्या है। इसे $S_r[a]$ या $S[a,r]$ या $B_r[a]$ या B[a,r] द्वारा दर्शाया जाता है।

Mathematically, $S_r[a] = \{x \in X : d(x,a) \leq r\}$.

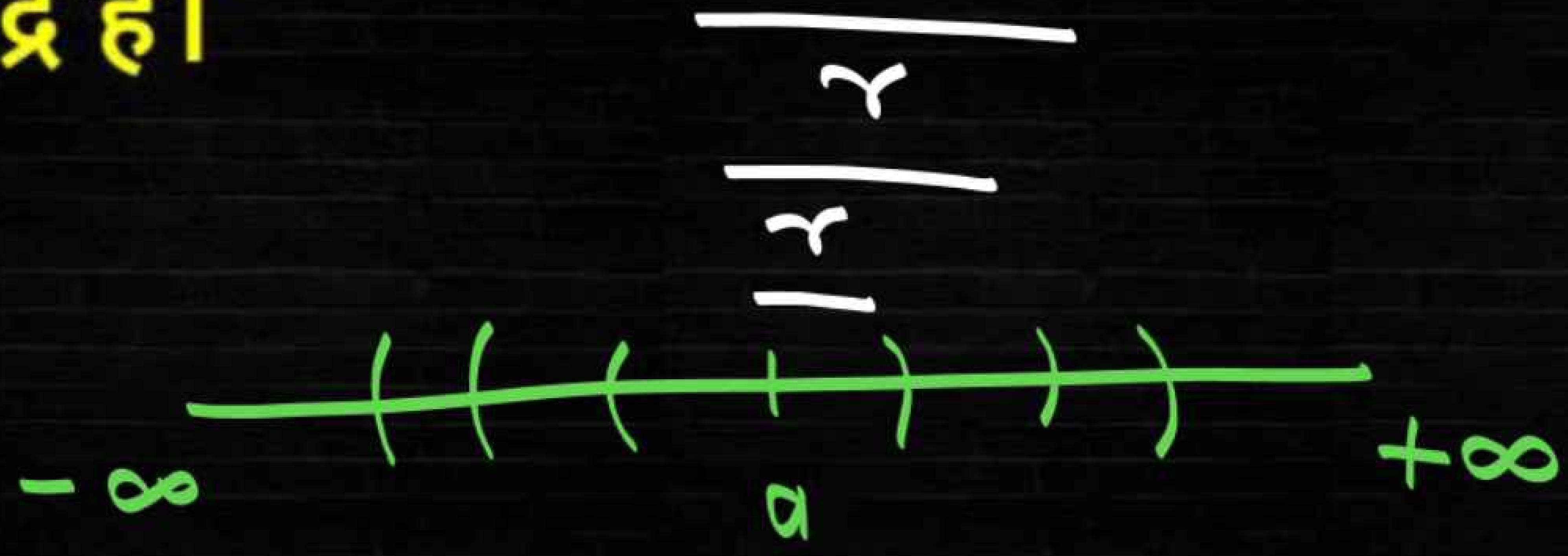
गणितीय, $\boxed{S_r[a] = \{x \in X : d(x,a) \leq r\}}$

Interior Point and Neighbourhood of a Point

Let A be any subset of a metric space (X, d). Then a point $a \in A$ is called interior point of A if a is the centre of an open sphere contained in A.

मान लीजिए A मीट्रिक स्पेस (X,d) का कोई उपसमुच्चय है। तब बिंदु a∈A को A का आंतरिक बिंदु कहा जाता है, यदि a, A में समाहित खुले गोले का केंद्र है।

$A \subseteq X$



In other words,

A point $a \in A$ is called interior point of A , if there exists a real number $r > 0$ such that $\boxed{S_r(a) \subseteq A.}$

एक बिंदु a∈A को A का आंतरिक बिंदु कहा जाता है, यदि कोई वास्तविक संख्या r>0 मौजूद है जैसे कि $S_r(a) \subseteq A$।

In this case, A is said to be neighbourhood of a point a.

इस स्थिति में, A को बिन्दु a का पड़ोस कहा जाता है।

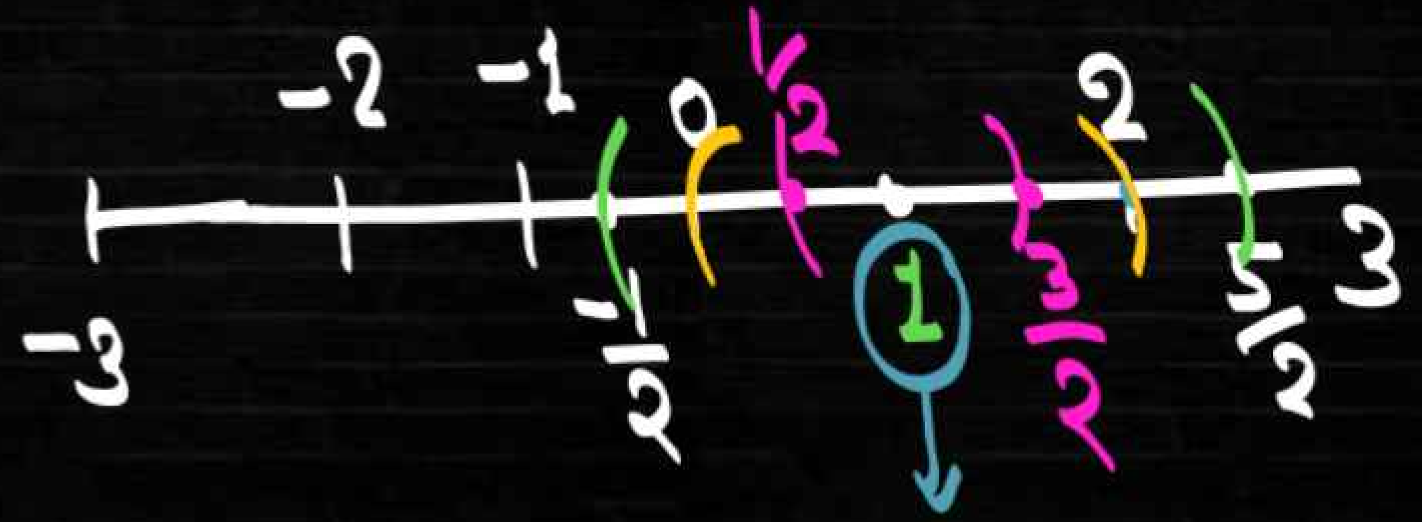
Example

Let $\boxed{X = R}$ and $A = (-3,3) \subseteq R$ on a metric space (R, d) then a point $a = 1$ is an interior point of A w.r.t usual . metric d defined by $d(x, y) = |x - y|$ for all $x, y \in R$.

मान लें कि X=R और A=(-3,3)⊆R एक मीट्रिक स्पेस (R,d) पर है तो बिंदु a=1 सामान्य मीट्रिक d के संबंध में A का आंतरिक बिंदु है जिसे d(x,y)=|x-y| द्वारा सभी $x, y \in R$· के लिए परिभाषित किया गया है।

$a = 1 \in A(-3,3)$

Center = 1



radius = $\frac{5}{2} \leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

radius = $3/2 \leftrightarrow \left(\frac{1}{2}, 7/2\right)$

radius = $2 \longrightarrow (0,2)$

Interior of a Set

The set of all interior points of A is called the interior of A and it is denoted by $\boxed{A^\circ}$

A के सभी आंतरिक बिंदुओं के समुच्चय को A का आंतरिक भाग कहा जाता है और इसे A° द्वारा दर्शाया जाता है

Mathematically, $\boxed{A^\circ = \{x : x \text{ is an interior point of A}\}}$

गणितीय रूप से, $A^\circ = \{x: x,$ A का एक आंतरिक बिंदु है$\}$

In other words, $A^\circ = \cup \{S_r(x) : S_r(x) \subseteq A\}$

दूसरे शब्दों में, $\boxed{A^\circ = \cup \{S_r(x) : S_r(x) \subseteq A\}}$

radius. Center

Results

$A \subseteq (X, d)$, $B \subseteq (X, d)$

If A and B are subsets of a metric space (X, d), then

यदि A और B मीट्रिक स्पेस (X,d) के उपसमुच्चय हैं, तो

1. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$
2. $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$
3. If $A \subseteq B$, then $A^\circ \subseteq B^\circ$
4. $(A^\circ)^\circ = A^\circ$

Open Set

$A \subseteq X$

Let (X, d) be a metric space, then a subset A of X is called an open set if every point of A is an interior point of A, i.e if A is a nbd of each of its points.

मान लीजिए (X,d) एक मैट्रिक समष्टि है, तो X का उपसमुच्चय A खुला समुच्चय कहलाता है यदि A का प्रत्येक बिंदु A का एक आंतरिक बिंदु है, अर्थात् यदि A अपने प्रत्येक बिंदु का nbd है।

$A_{\text{open set}} \Rightarrow \left\{ \left(\frac{-1}{2}, \frac{5}{2}\right), (0, 2) \right\}$

Results OR Properties

1. In any metric space (X, d), the empty $\emptyset$ anad X are open sets.
किसी भी मैट्रिक स्पेस (X,d) में, खाली ø और X खुले सेट हैं।

2. In a metric space (X, d), every open sphere is an open set.
मैट्रिक स्पेस (X,d) में, प्रत्येक खुला गोला एक खुला सेट है।

3. In a metric space, the union of arbitrary collection of open sets is open.
मैट्रिक स्पेस में, खुले सेटों के मनमाने संग्रह का संघ खुला होता है।

4. In a metric space, the intersection of a finite number of open sets is open.

मैट्रिक स्पेस में, सीमित संख्या में खुले सेटों का प्रतिच्छेदन खुला होता है।

5. Let (X, d) be a metric space and A be any subset of X. Then A is open iff $A^{\circ} = A$. $A \subseteq X$

मान लें कि (X,d) एक मैट्रिक स्पेस है और A, X का कोई उपसमुच्चय है। तब A खुला है यदि और केवल यदि $A^{\circ} = A$ है।

$a \in A$

$\boxed{A^{\circ} = A}$