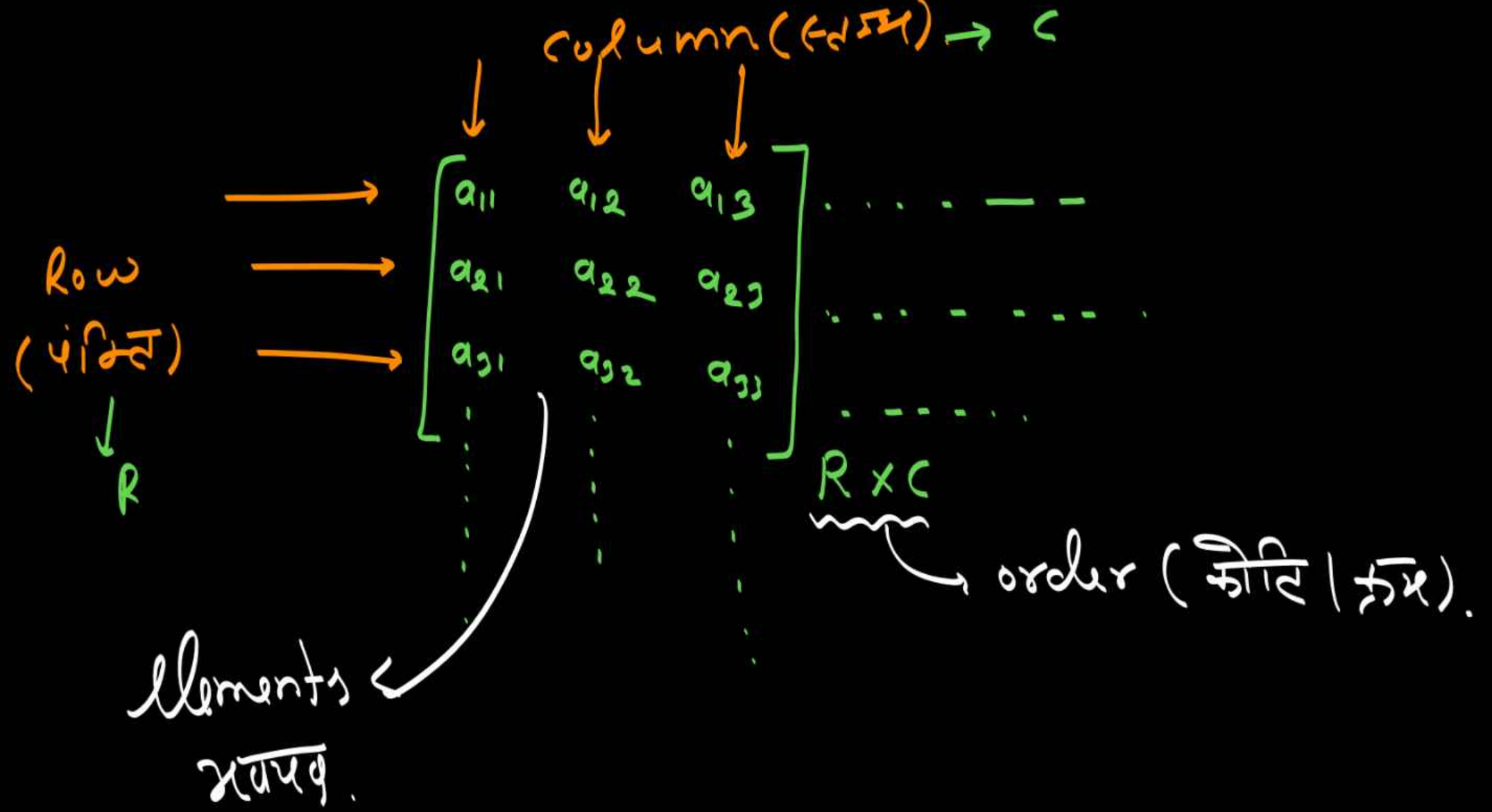
DSSSB TGT PART(B)

MATHS

METRIC SPACES
(BASIC CONCEPTS OF METRIC SPACES)

LIVE 29/08/2024 05:00 PM

Matrix


column (स्तंभ) → C
Row
(पंक्ति)
R
a_{11} a_{12} a_{13}
a_{21} a_{22} a_{23}
a_{31} a_{32} a_{33}
R × C
order (कोटि / क्रम).
elements
अवयव.

ADDRESS OF ELEMENTS

a_{ij} = element.

Place in which Row (पंक्ति में स्थान)

Place in which Column (स्तम्भ में स्थान)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Q. The element in the ith row and the jth column of a determinant of third order is equal to $2(i+j)$. What is the value of the determinant?

तृतीय कोटि के एक सारणिक की i वीं पंक्ति और j वें स्तंभ में अवयव $2(i+j)$ के बराबर है। इस सारणिक का मान क्या है?

(a) 0

(b) 2

(c) 4

(d) 6

$a_{ij} = 2(i+j)$

$a_{11} = 2(1+1) = 4$

$a_{12} = 6 \quad a_{23} = 10$

$a_{13} = 8 \quad a_{31} = 8$

$a_{21} = 6 \quad a_{32} = 10$

$a_{22} = 8 \quad a_{33} = 12$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$A \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$|A| \Rightarrow 4(96-100) - 6(72-80) + 8(60-64)$

$|A| \Rightarrow -16 + 48 - 32 = 0$

Q. If a matrix has 18 elements how many possible order matrices have?

यदि एक मैट्रिक्स में 18 तत्व हैं तो संभावित ऑर्डर मैट्रिक्स में कितने तत्व होंगे?

(a) 4

(b) 6

(c) 8

(d) 2

$1 \times 18 = 18 \times 1$

$2 \times 9 = 9 \times 2$

$3 \times 6 = 6 \times 3$

6

Q. How many distinct matrices exist with all four entries taken from $\{1,2\}$?

ऐसे कितने भिन्न आव्यूह [redacted] हैं, जिनमें सभी चार प्रविष्टियाँ $\{1,2\}$ से ली गई हों?

(a) 16

(b) 24

(c) 32

(d) 48

$(4-1) \times 2^4$

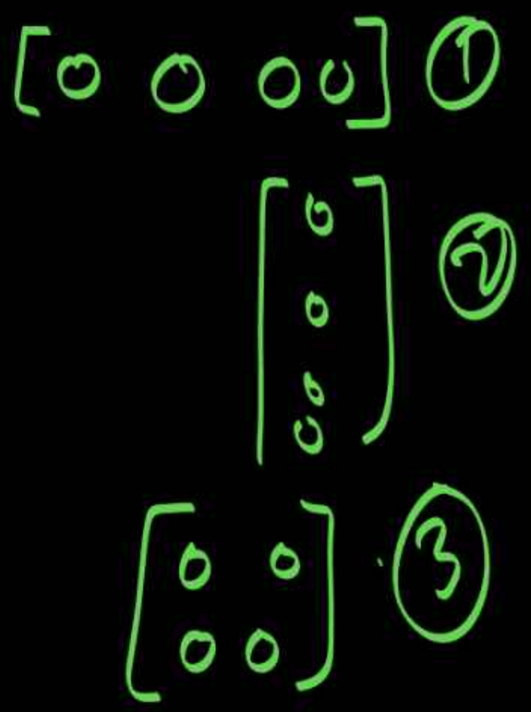
3×16

48

$1 \times 4 \leftarrow 4 \times 1$

2×2

3



Substraction

Addition of Matrices

$A \Rightarrow \begin{bmatrix} & \end{bmatrix}_{m \times n}$ $\quad B = \begin{bmatrix} & \end{bmatrix}_{p \times q}$

① order are same. $\rightarrow m = p$, $n = q$

$A \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$B \Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

$A + B \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

$A - B \Rightarrow \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ //

Properties of Matrix Addition

(i) Matrix addition is commutative: If $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ **be two** $m \times n$ **matrices, then** $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

(ii) Matrix addition is associative: If A, B, C be three matrices each of the type $m \times n$**, then** $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Multiplication of a Matrix by a Scalar

$A \Rightarrow [\ ]_{m \times n}$ $\quad B = [\ ]_{p \times q}$

$n = p$

$AB \Rightarrow [\ ]_{m \times q}$

$A_{2\times3}, B_{2\times2}, C_{3\times1}, D_{2\times3}$

$(BA)D \rightarrow (2\times2)(2\times3)(2\times3)$ ✗

$(2\times3) \times (2\times3)$

$(BD).C \rightarrow (2\times2)(2\times3)(3\times$ ✓

$(2\times3)(3\times1)$

(2×1)

Properties of Multiplication of a Matrix by a Scalar.

Theorem I: If A and B are two matrices each of the type $m \times n$, then $k(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = k\mathrm{A} + k\mathrm{B}$ i.e., scalar multiplication of matrices distributes over the addition of matrices.

प्रमेय I: यदि A और B दो आव्यूह हैं जिनमें से प्रत्येक m×n प्रकार के हैं, तो k(A+B)=kA+kB अर्थात् आव्यूहों का अदिश गुणन आव्यूहों के योग पर वितरित होता है।

Theorem 2: If p and q are two scalars and A is any $m \times n$ matrix, then $(p+q)\mathbf{A} = p\mathbf{A} + q\mathbf{A}$.

प्रमेय 2: यदि p और q दो अदिश हैं और A कोई m×n आव्यूह है, तो (p+q)A=pA+qA.

Theorem 3: If p and q are two scalars and A is any $m \times n$ matrix, then $p(q\mathbf{A}) = (pq)\mathbf{A}$.

प्रमेय 3: यदि p और q दो अदिश हैं और A कोई m×n आव्यूह है, तो p(qA)=(pq)A.

Theorem 4: If A be any $m \times n$ matrix and k be any scalar, then $(-k)\mathbf{A} = -(k\mathbf{A}) = k(-\mathbf{A})$

प्रमेय 4: यदि A कोई m×n आव्यूह हो और k कोई अदिश हो, तो $(-k)\mathbf{A} = -(k\mathbf{A}) = k(-\mathbf{A})$

Multiplication of Two Matrices

If $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ then find AB. Does BA exist?

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times4}$ तो AB ज्ञात करें। क्या BA मौजूद है?

$AB \Rightarrow (3\times3)(3\times4)$

✓ (3×4)

$BA \Rightarrow (3\times4)(3\times3)$

$\neq$

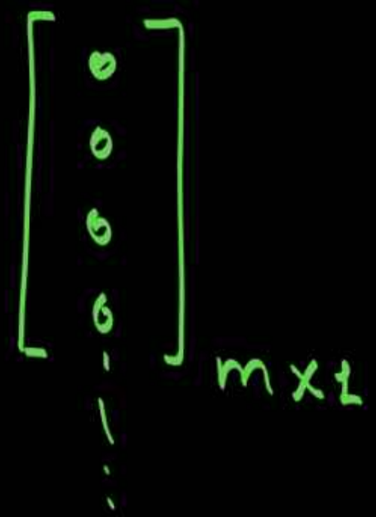
✗

Type of Matrices/आव्यूह के प्रकार

1 Row Matrix/पंक्ति आव्यूह

$$[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]_{1 \times m}$$

2 Column Matrix/स्तंभ आव्यूह



3 Singleton Matrix/एकल आव्यूह

$$A = [0]_{1\times 1}$$

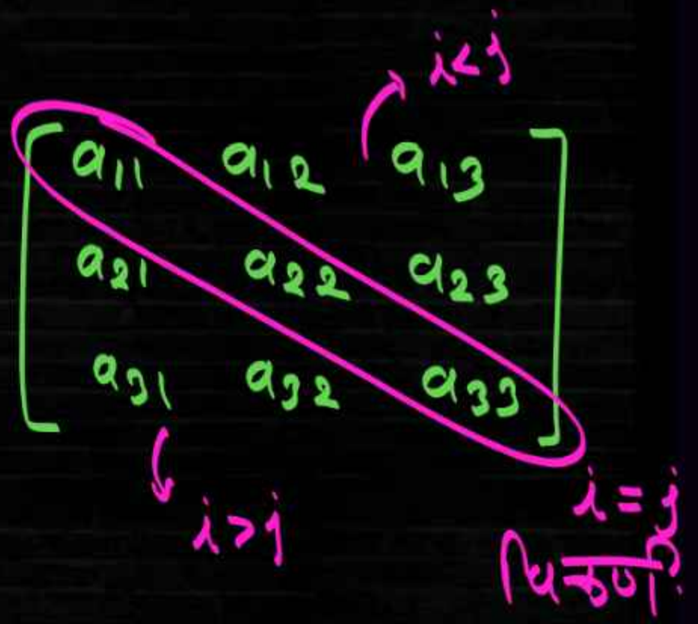
5 Zero Matrix/शून्य आव्यूह / Null matrix.

$$'O' \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$'O' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Square Matrix/वर्ग आव्यूह → Row = column.

1. Order = $(1\times1), (2\times2), (3\times3) \ldots (m\times m)$.
2. Total no. of elements = n^2
3. Total no. of diagonal elements = n
4. Total non-diagonal element = $n^2 - n$



I. Diagonal elements

$i = j$

II. Upper diagonal elements

$(i < j)$

III. Lower diagonal elements

$i > j$

No. of diagonal Elements = n

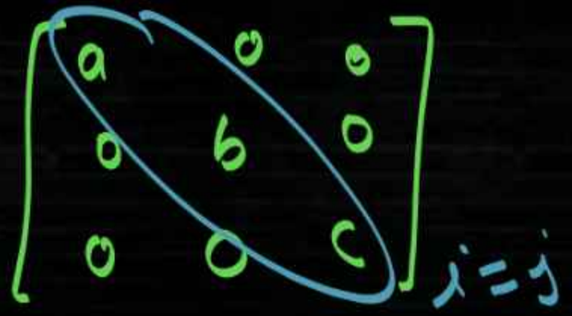
No. of Upper diagonal elements = $\frac{n^2-n}{2}$

No. of Lower diagonal elements = $\frac{n^2-n}{2}$

Zero Matrix/शून्य आव्यूह =

5 Diagonal Matrix/ विकर्ण आव्यूह

→ Square matrix.



(i) $i=j$, $a_{ij} \neq 0$

$i \neq j$, $a_{ij} = 0$

Order → $n \times n$

I. Maximum no. of zeroes = n^2

II. Minimum no. of zeroes = $n^2 - n$

Tracing → Sum of all diagonal element.

ट्रेस

$(a+b+c)$.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$ → diagonal.

1 $|A| = abc$

2 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{bmatrix}$

3 $|A^{-1}| = \frac{1}{abc}$

4 Adj $A = \begin{bmatrix} bc & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{bmatrix}$

5 $|\text{adj } A| = (abc)^2$

Q. Minimum number of zeroes present in a diagonal matrix is 90, What is order of matrix ?

एक विकर्ण मैट्रिक्स में मौजूद शून्यों की न्यूनतम संख्या 90 है, मैट्रिक्स का क्रम क्या है?

(a) 8×8

(b) 10×10

(c) 11×11

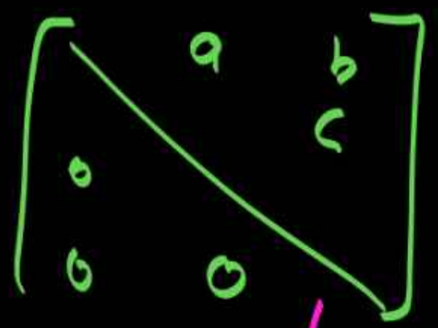
(d) 5×5

$n^2 - n = 90$

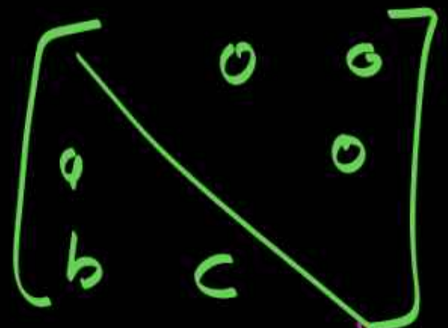
$10^2 - 10 = 90$

$n \times n = 10 \times 10$

6 Traingular Matrix त्रिकोणीय मैट्रिक्स



Upper triangular matrix



lower triangular matrix.

6 What is a order of upper triangular matrix. In which minimum number of zeroes is 45.

ऊपरी त्रिकोणीय मैट्रिक्स का क्रम क्या है। जिसमें शून्यों की न्यूनतम संख्या 45 है।

(a) 9×9

(b) 5×5

(c) 12×12

(d) 10×10

$$\frac{n^2-n}{2} = 45$$

$$n^2-n = 90$$

7. Scalar Matrix/अदिश आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix}_{i=j}$$

$$A = K\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↳ Identity → I
इकाई आव्यूह

(#) $i = j : a_{ij} = K$

(#) $i \neq j : a_{ij} = 0$

$$A = KI$$

① $$A^n = K^{n-1} \cdot A$$

② $$|A|_{n\times n} = K^n$$

③ $$A.\,adj(A) = adj(A).A \Rightarrow |A|.I$$

$|A| = 0$

Q. If A is a singular matrix, then $A.\text{adj}(A)$ is

यदि A एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है, तो A.adj(A) है-

(a) an identity matrix एक तत्समक आव्यूह

(b) a null matrix एक शून्य आव्यूह

(c) a scalar matrix एक अदिश आव्यूह

(d) N.O.T

$|A|.I$

$0.I$

'0'

7 A square matrix $[a_{ij}]$ such that $a_{ij} = 0$ for $i \neq j$ and $a_{ij} = k$ where k is a constant for $i = j$ is called :

एक वर्ग मैट्रिक्स $[a_{ij}]$ जिससे कि $i \neq j$ के लिए $a_{ij} = 0$ और $a_{ij} = k$ जहां k $i = j$ के लिए एक स्थिरांक है, कहलाता है:

जहाँ k एक अचर है, क्या कहलाता है?

(a) diagonal matrix, but not scalar matrix
विकर्ण आव्यूह किंतु अदिश आव्यूह नहीं

(b) scalar matrix/अदिश आव्यूह

(c) unit matrix/इकाई आव्यूह

(d) N.O.T

Q. If $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, then $A^{(5)} =$

(a) 243A

(b) 81 A

(c) 27 A

(d) 9 A

$A^n = K^{n-1} \cdot A$

$A^5 = K^4 \cdot A$

$= 3^4 \cdot A$

$= 81 \cdot A$

9. Identity Matrix/तत्समक आव्यूह

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

1. $|I| \rightarrow 1$
2. $I^{-1} \rightarrow I$
3. $I^{n} \rightarrow I$
4. $I^{T} \rightarrow I$
5. $A.I = I.A = A$
6. $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$
7. $Tr(I) = n$ ↳ order.

Secondary identity matrix. (सेकेंडरी आईडेंटिटी मैट्रिक्स).

$$I_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|I_S| = -1$$

$$I_S^n \begin{cases} \rightarrow n = \text{odd} \rightarrow I_S \\ \rightarrow n = \text{even} \rightarrow I \end{cases}$$

$$(I_S)^{10} \rightarrow I$$

$$(I_S)^{13} \rightarrow I_S$$

Singular Matrix/अव्युक्क्रमणीय आव्यूह

Non-invertible (आव्यूह का प्रतिलोम नहीं ज्ञात कर सकते).

$|A| = 0$

$$A^{-1} \Rightarrow \frac{adj\, A}{|A|}$$

14. For what value of k is the matrix $\begin{bmatrix} 2\cos 2\theta & 2\cos 2\theta & 6 \\ 1-2\sin^2\theta & 2\cos^2\theta - 1 & 3 \\ k & 2k & 1 \end{bmatrix}$ singular?

k के किस मान के लिए आव्यूह $\begin{bmatrix} 2\cos 2\theta & 2\cos 2\theta & 6 \\ 1-2\sin^2\theta & 2\cos^2\theta - 1 & 3 \\ k & 2k & 1 \end{bmatrix}$ अव्युत्क्रमणीय है?

(a) 0 only

(b) 1 only

(c) 2 only

(d) Any real value किसी भी वास्तविक मान

$\cos 2\theta$ $\cos 2\theta$

$2\cos 2\theta(\cos 2\theta - 6k)$

$-2\cos 2\theta(\cos 2\theta - 3k)$

$6(2k\cos 2\theta - k\cos 2\theta)$

$\Rightarrow 2\cos^2 2\theta - 12\cos 2\theta - 2\cos^2 2\theta + 6\cos 2\theta + 6k\cos 2\theta$

$\cos 2\theta(6k-6) = 0$

$k-1 = 0$

11. Non-singular Matrix/व्युत्क्रमणीय आव्यूह

↓

Invertiable matrix.

$|A| \neq 0$

Q. If $A = \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$, where $0 \leq \theta \leq 2\pi$, then

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$, जहाँ $0 \leq \theta \leq 2\pi$, तो

(a) $\det A = 0$

(b) $\det A \in (2, \infty)$

(c) $\det A \in (2, 4)$

(d) $\det A \in [2, 4]$

$|A|$

$1(1+\sin^2\theta) - \sin\theta(-\sin\theta + \sin\theta) + 1(\sin^2\theta + 1)$

$(2 + 2\sin^2\theta) \rightarrow [2, 4]$

$[0 \quad 1]$