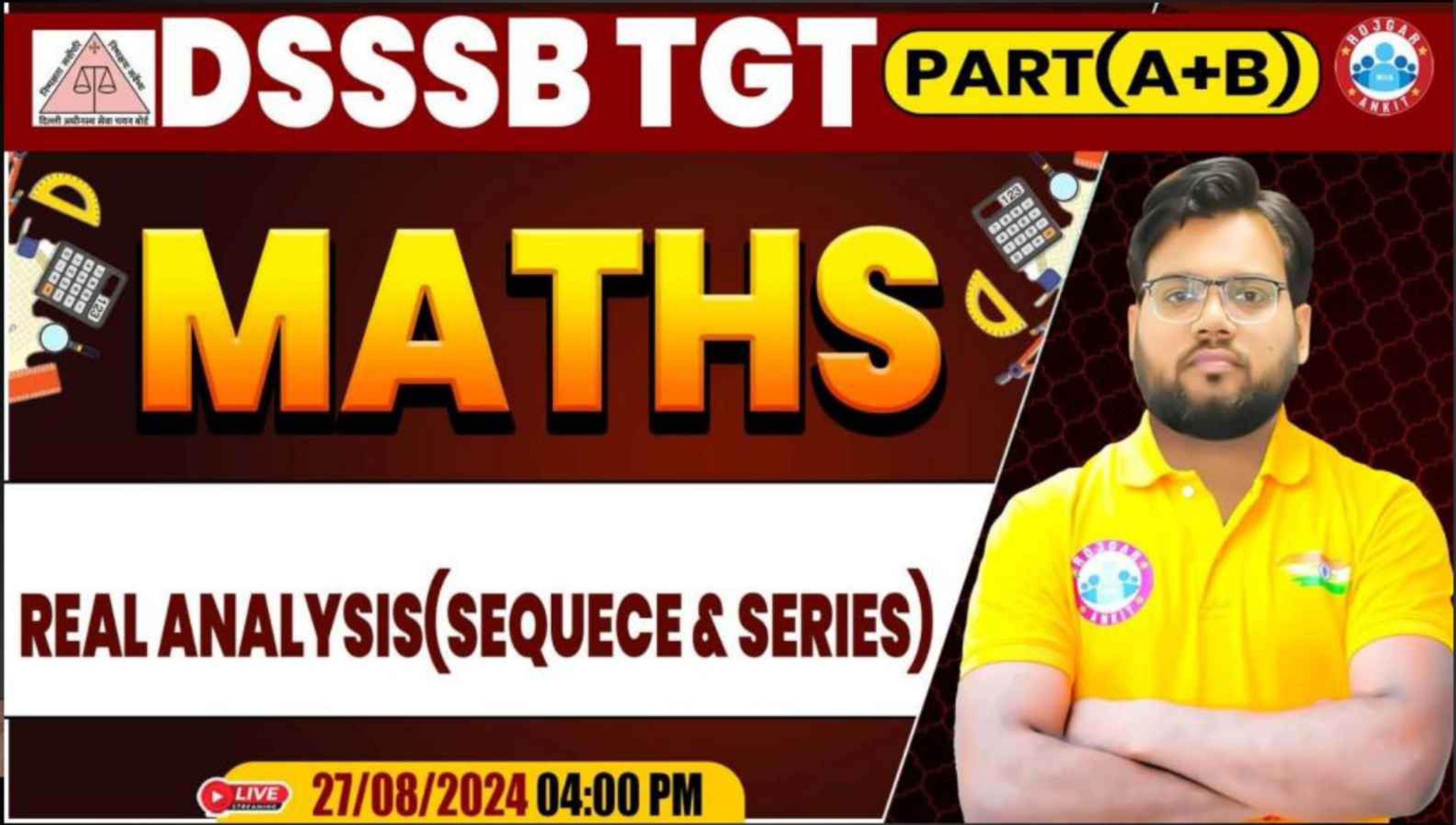

DSSSB TGT
PART(A+B)
MATHS
REAL ANALYSIS(SEQUECE & SERIES)
LIVE
27/08/2024 04:00 PM

ALGEBRA → Books
DIFFERENTIAL EQ^N →
MULTIVARIATE CALCULUS
PARTIAL DIFF EQ^n
MATRIC SPACE
LINEAR ALGEBRA I/II

§ Sequence (अनुक्रम) Definition:

Every function defined from the set N of natural numbers to a non empty set X is called a sequence.

(प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N से किसी अरिक समुच्चय X में परिभाषित प्रत्येक फलन एक अनुक्रम कहलाता हैं)

अन्य शन्दों में किसी अरिक्त समुच्चय X में अनुक्रम एक नियम होता है जो प्रत्येक प्राकृत संख्या को X के अद्वितीय अवग्रव से सम्बद्ध करता है।

अर्थात् फलनन $s, N \rightarrow X, X$ में परिभाषित अनुक्रम है।

Special Case (विशिष्ट स्थिति) जब X वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R का उप समुच्चय लिया जाये अर्थात् $X \subset R$ तो फलन $s: N \rightarrow R$

वास्तविक अनुक्रम (Real Sequence) कहलाता है।

§ 1.2. Real Sequence (वास्तविक अनुक्रम) Definition:

Every function defined from the sel N of nutural mumbers to a non empty sub set X of the set of real mumbers R is called a real sequence.

§ 1.3. Representation of a Sequence (अनुक्रम का निरूपण):

यदि $x: N \to R$ अनुक्रम है तो $n \in N$ के प्रतिबिम्ब $x(n) = x_n \in R$ से प्रकट करते हैं जो अनुक्रम का ॥वां पद कहलाता है।

इस प्रकार अनुक्रम $< x(1), x(2), \ldots x(n) >$ या $< x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$, को संश्रेप रूप में $< x_n >$ या $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ से निरूपित करते हैं।

§ 1.4. Range of a Sequence (अनुक्रम का परास) :

Defintition :

The set of all distinct elements of a sequence is called the range of the sequence.

(अनुक्रम के विधिन पदों का समुच्चय, अनुक्रम का परास कहलाता हैं)

Important Remarks (टिप्पणी):

1. अनुक्रम का प्रान्त (डोमेन) आवश्यक रूप से N ही होता है। चूंकि N अनन्त समुच्चय है, अतः अनुक्रम में अनन्त पद होते हैं।

2. अनुक्रम का पगस सीमित भी हो सकता है.। उदाहरणार्थ, अनुक्रम $\langle 1, -1, 1, -1, \ldots \rangle$ का परास $= \{1, -1\}$

3. अचर अनुक्रम का परास $= \{c\}$

4. तत्समक अनुक्रम का प्रान्त $=$ परास $= N \subset R$

5. $x_1, x_2, \dots$ इत्यादि अनुक्रम के प्रथम, द्वितीय, ... पद कहलाते हैं। यदि m वें तथा n वें पद समान $(x_m = x_n)$ भी हों तो वे भिन्न-भिन्न पद ही माने जाते हैं अर्थात् विभिन्न स्थितियों के पद भी विभिन्न ही माने जाते है भले हीं उनका मान समान हो।

Ex 1. यदि $x_n = 1/n$, तो $\langle x_n >=< 1.\frac{1}{2}, \frac{1}{3} = \frac{1}{4}, \dots .1/n.$

2. यदि $x_n = (-1)^n.$ तो $< x_n >=< -1.1 < -1.1..>$

3. यदि $x_n = 1 - (-1)^n$, तो $\langle x_n >=< 2.11 = 2.0....>$

§ 1.5. Particular Sequences (विशेष प्रकार के अनुक्रम):

(a) Constant Sequence (अचर अनुक्रम):

If nth term of the sequence $x_n = c$ (constant) $\in R, \forall n \in N$. then the sequence obtained $\langle c, c.. \rangle$is called a constant sequence.

(यदि अनुक्रम का n वां पद $x_n = c$ अचर $\in R, \forall n \in N$. हो, तो इससे प्राप्त अनुक्रम $\langle c, c \ldots \rangle$ अचर अनुक्रम कहलाती है।)

(b) Identity Sequence (तत्समक अनुक्रम):

If n th lexis of the sequence $x_n = n$, then the sequence obtained $\langle 1, 2, 3, \dots \rangle$ is called an identity sequence.

यदि अनुक्रम का n वां पद $x_n = n$: हो, तो प्राप्त अनुक्रम $< 1, 2, 3 \dots >$ तत्समक अनुक्रम कहलाती है।

§ 1.6 Equal Sequence (समान अनुक्रम) : Definition :

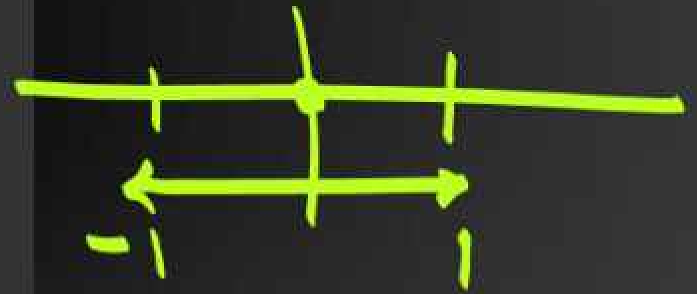
Two sequences $< x_n >$ and $< y_n >$ are said to be equal. If their n th terms are same i.e. $x_n = y_n, \forall n \in N$.

(दो अनुक्रन $\langle x_n \rangle$ तथा $< y_n >$ समान कहलाती हैं यदि उनके n वें पद समान हों अर्थात् $x_n = y_n, \forall n \in N.$).

§ 1.7 Boundedness of a Sequence (अनुक्रम की परिबद्धता):

$x_n = \langle(-1)^n\rangle$ 1 upper bound

$= \langle -1, 1, -1, 1, -1 \cdots \rangle$



Definitions :

(a) Bounded above Sequence (ऊपर की ओर परिबद्ध अनुक्रम):

A sequence x is said to be bounded above, if there exist a real number K such that $x_n \le K, \forall n \in N$.

(एक अनुक्रम x ऊपर की ओर परिबद्ध कहलाती है यदि एक ऐसी वास्तविक संख्या K विद्यमान हो कि $x_n \le K. \forall n \in N$)]

(b) Bounded below sequence

A sequence x is said to be bounded below, If there exist a Real Number k such that $x_n \geqslant k, \forall n \in N$.

$x_n = \langle (-1)^n \rangle$

$= \langle -1, 1, -1, 1 \ldots \rangle$

-1 Lower bound

$x_n \geq k$

$k = -1$

$k \leqslant x_n$

(एक अनुक्रम x परिबद्ध कहलाती है यदि यह ऊपर तथा नीचे दोनों की ओर परिबद्ध हो अर्थात यदि ऐसी दो संख्यायें k K विद्यमान हों कि $k \leq x_n \leq K, \forall n \in N$).

$x_n = \langle (-1)^n \rangle$

$= \langle -1, 1, -1, 1 \ldots \rangle$

$-1 \leq x_n \leq 1$

$a \leq x_n \leq K$

$x_n = \langle \frac{1}{n} \rangle \quad n \in N$

$\Rightarrow \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \frac{1}{n} \ldots \frac{1}{\infty} \rangle$ ($\frac{1}{\infty} = 0$)

$0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$

[Unbounded Sequence (अपरिबद्ध अनुक्रम):

A sequence x is said to be unbounded. If it is neither bounded above nor below.

(जो अनुक्रम न तो ऊपर की ओर और न ही नीचे की ओर परिब्ध हो, वह अपरिबद्ध अनुक्रम कहलाती है।)

$x_n = \langle n \rangle \quad (n \in R)$

$\Rightarrow \langle -\infty \ldots\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \infty \rangle$

Ex 1. $< 1/n >$ एक परिबद्ध अनुक्रम है, क्योंकि $0 \leq x_n \leq 1, \forall n \in N$

2. $< (-1)^n >$ परिबद्ध अनुक्रम है।

3. $\langle \sin \frac{n\pi}{2} \rangle$ परिबद्ध है : $\because -1 \leq \sin \frac{n\pi}{2} \leq 1. \forall n \in N$

4. $\langle n^2 \rangle$ नीचे की ओर परिबद्ध हैं किन्तु ऊपर की ओर परिबद्ध नहीं हैं।

5. $\langle 2^n \rangle$ नीचे की ओर परिबद्ध है किन्तु ऊपर की ओर परिवद्ध नहीं हैं।

6. $\langle (-n)^n \rangle$ न तो ऊपर की ओर और न ही नीचे की ओर परिबद्ध हैं। _अत: यह एक अपरिबद्ध अनुक्रम है।

Supremum and Intimum of a sequence → (अनुक्रम का उच्चाक तथा निम्नक)

उच्चक

Supremum → **The minimum value of the upper bounds of a bounded sequence is Called the Supremum (sup) or Least Upper Bound (LUB).**

(परिबद्ध अनुकम में उपरि परिबन्धों का न्यूनतम मान अनुक्रम का उच्चक (SUpremum) or LUB कहलाता है।

$(-1)^n$

$1-(-1)^n$

Infimum (निम्नक) → The maximum value of the - Lower bounds of a bounded sequence is called Infimum (Inf) or Greatest Lower Bound (glb). (परिबद्ध अनुक्रम में निम्न परिबन्धों का महत्तम मान अनुक्रम का निम्नक (Infimum) or glb कहलाता है।

Infremum (Inf)

§ 1.9. Monotonic Sequence (एकदिष्ट अनुक्रम)

Definition:

If a sequence $\langle x_n \rangle$ is either monotonically increasing (↑) or monotonically decreasing (↓), then $\langle x_n \rangle$ is called monotonic sequence.

(यदि अनुक्रम $\langle x_n \rangle$ या तो एकदिष्ट वर्धमान हो या एकदिष्ट ह्रासमान हो, तो $\langle x_n \rangle$ एकदिष्ट अनुक्रम कहलाता है।)

ह्रासमान

$\langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$

$\langle 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$

Strictly Monotonic Sequence (निरन्तर एकदिष्ट अनुक्रम) : Definition :

If a sequence $\langle x_n \rangle$ is sirictly monotonically increasing or strictly monotomically decreasing. then $< x_n >$ is called strictly monotonic sequence.

(यदि $\langle x_n >$ निरन्तर एकदिष्ट वर्धमान हो या निरन्तर एकदिष्ट ह्रासमान अनुक्रम हो तो $\langle x_n \rangle$ निरन्तर एकदिष्ट अनुक्रम कहलाता है।)

(1) Monotonically Increasing (↑) Sequence:

(एकदिष्ट वर्धमान (↑) अनुक्रम): Definition:

Monotonically Increasing

$\langle 1, 1, 2, 3 \rangle$

In the sequence $\langle x_n \rangle$, if $x_{n+1} \geq x_n$, $n \in N$, i.e., $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots$ then $\langle x_n \rangle$ is called monotonically increasing (↑) sequence.

(अनुक्रम $< x_n >$ में यदि $x_{n+1} \geq x_n, \forall n \in N$, अर्थात् $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots$ तो $\langle x_n \rangle$ एकदिष्ट वर्धमान अनुक्रम (↑) कहलांती है।)

Strictly Monotonically Increasing (↑) Sequence:

(निरन्तर एकदिष्ट वर्धमान (↑) अनुक्रम) : Defintition :

In the sequence $\langle x_n \rangle$, if $x_{n+1} > x_n, \forall n \in N$, then $\langle x_n \rangle$ is called strictly monotonically increasing (↑) sequence.

(अनुक्रम $< x_n >$ में यदि $x_{n+1} > x_n, \forall n \in N$, तो $< x_n >$ निरन्तर एकदिष्ट वर्धमान अनुक्रम कहलाती है।)

उदाहरण : $\left\langle \frac{n}{n+1} \right\rangle$ निरन्तर एकदिष्ट वर्धमान (↑) अनुक्रम है।

$\left\langle \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6} < \frac{6}{7} \text{ ------ } \right\rangle$

(2) Monotonically Decreasing $(\downarrow)$ Sequence:

(एकदिष्ट ह्रासमान $(\downarrow)$ अनुक्रम) : Definition :

In the sequence $\langle x_n \rangle$, if $x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in N$, i.e., $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots$, then $\langle x_n \rangle$ is called monotonically' decreasing $(\downarrow)$ sequence.

(अनुक्रम $< x_n >$ में यदि $x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in N$, अर्थात् $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots$, तो $\langle x_n \rangle$ एकदिष्ट ह्रासमान $(\downarrow)$ अनुक्रम कहलाती है।)

Strictly Monotonically Decreasing (↓) Sequence :

(निरन्तर एकदिष्ट ह्रसमान (↓) अनुक्रम) : Definition :

In the secpuence $< x_n >$, if $x_{n+1} < x_n, \forall n \in N$, then $\langle x_n \rangle$ is called strictly monotonically' (↓) sequence.

(अनुक्रम $< x_n >$ में यदि $x_{n+1} < x_n, \vee\, n \in N$, तो $\langle x_n \rangle$ निरन्तर एकदिष्ट ह्रासमान (↓) अनुक्रम कहलाती है।)

$\langle -n \rangle$

$\langle -1 > -2 > -3 > -4 \cdots \rangle$

उदाहरण : $< \frac{1}{n} >$ निरन्तर एकदिष्ट ह्रासमान (↓) अनुक्रम है।

$\langle 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6} \cdots \frac{1}{\infty} \rangle$