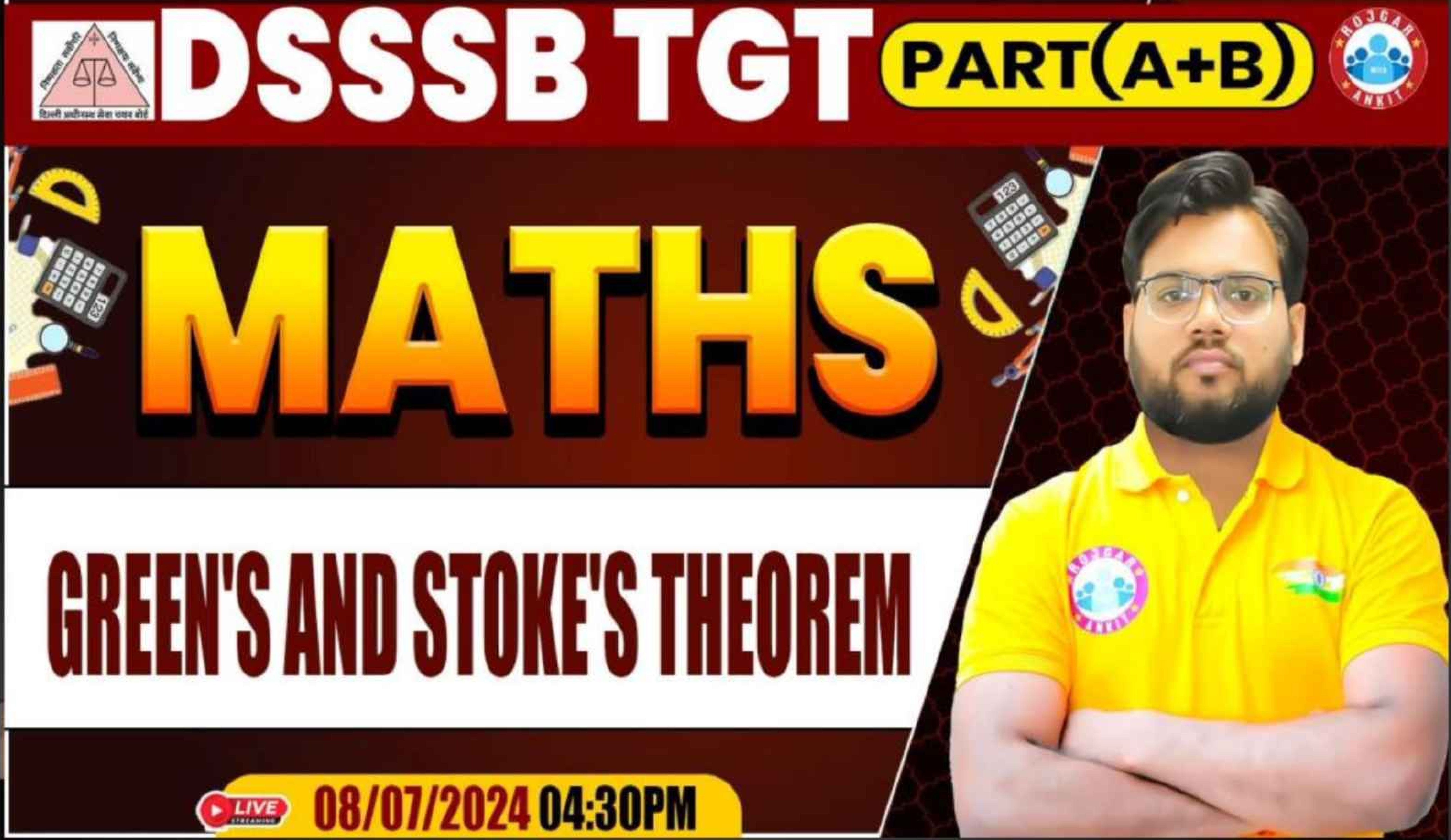

DSSSB TGT
PART(A+B)
MATHS
GREEN'S AND STOKE'S THEOREM
LIVE
08/07/2024 04:30PM

THE DIVERGENCE THEOREM OF GAUSS.

The surface integral of the normal component of a vector F taken over a closed surface is equal to the integral of the divergence of F taken over the volume enclosed by the surface.

एक बंद सतह पर लिए गए सदिश F के सामान्य घटक का सतही समाकलन, सतह द्वारा घेरे गए आयतन पर लिए गए F के विचलन के समाकलन के बराबर होता है।

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbb{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

where $\mathbf{n}$ is the outwards drawn unit normal vector to S.

जहाँ n, S के लिए बाहर की ओर खींचा गया इकाई सामान्य सदिश है।

$$\hat{n} = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}$$

$$\iint_S F \cdot n \, ds = \iiint_V \nabla \cdot F \, dv$$

1. Cartesian Foam,

$$\iint F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dV$$

$$\iint F_1 dydz + F_2 dxdz + F_3 dxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dv$$

2. Evaluate (मान ज्ञात कीजिए) :

$$\iint_S F \cdot \hat{n}\, dS, \text{ जहाँ } F = 4xz\,i - y^2\,j + yz\,k$$

S is the surface of the cube bounded by the planes :

(S उस घन का पृष्ठ हैं जो कि निम्न समतलों में परिबद्ध है)

$$x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$$

$$\text{Answer} = \frac{3}{2}$$

3. Use Gauss's divergence theorem i to show that :

(गॉस प्रमेय की सहायता से प्रदर्शित कीजिए) :

$$\iint_S (x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy) = 4\pi a^3,$$

$= \iiint \frac{\partial F_1}{\partial x}$

where the surface S is the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.(जहाँ सतह S, गोला $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ है)

$\iiint (1 + 1 + 1)\,dv$

$\iiint_V 3\,dv$

Stoke's Theorem (स्टॉर्क्रमेयेय) :'Statement:

The line integral of a vector function F around any closed curve is equal to the surface integral of curl F[illegible] over any surface of which the curve is a boundary edge.

(किसी सदिश फलन F का किसी बंद वक्र के चारों ओर लिया गया रेखा समाकल के curl F के पृष् समाकल के ब्रबर होता हैं यह समांकल उस पृष्ष पर लिया जाता है जिसकी सीमा वह बंद वक्र बनाती है

4. interior. Then

$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S (\mathbf{curl\ F}) \cdot dS$

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S \nabla \times F \cdot n\, ds = \iint_S (\text{Curl}\, F) \cdot k\, ds$$

Cartesian form (कार्तीय रूप):

$$\int_C F \cdot dr = \iint_C (iF_1 + jF_2 + kF_3) \cdot (idx + jdy + kdz)$$

$$= \int_C F_1 dx + F_2 dy \qquad [\because dz = 0]$$

चूँकि $\hat{n} = k$, अत:

$$\int_C (\nabla \times F) \cdot \hat{n} dS = \int (\nabla \times F) \cdot k dS$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\, dy$$

5. Using Stoke's theorem, evaluate:

(स्ट्रोक्स प्रमेय का उपयोग करके मान ज्ञात कीजिए) :

$$\int_C xy\,dx + xy^2\,dy,$$

$F = xy\,i + xy^2\,j$

$\int F\cdot dr = \iint_S (\nabla\times F)\cdot k\,ds$

where C is the square in the xy plane with vertices respectively :

(जहाँ C, xy समतल में एक वर्ग हैं जिसके शीर्ष क्रमशः हैं):

$$(1, 0), (-1, 0), (0, 1); (0,-1)$$

$\iint (\nabla\times F)\cdot k\,ds$

$$\nabla\times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & xy^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$\nabla\times F = i(0) - j(0) + k(y^2 - x)$

$\nabla\times F = (y^2 - x)k$

$\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-1}^{1} (y^2 - x)\,dx\,dy$

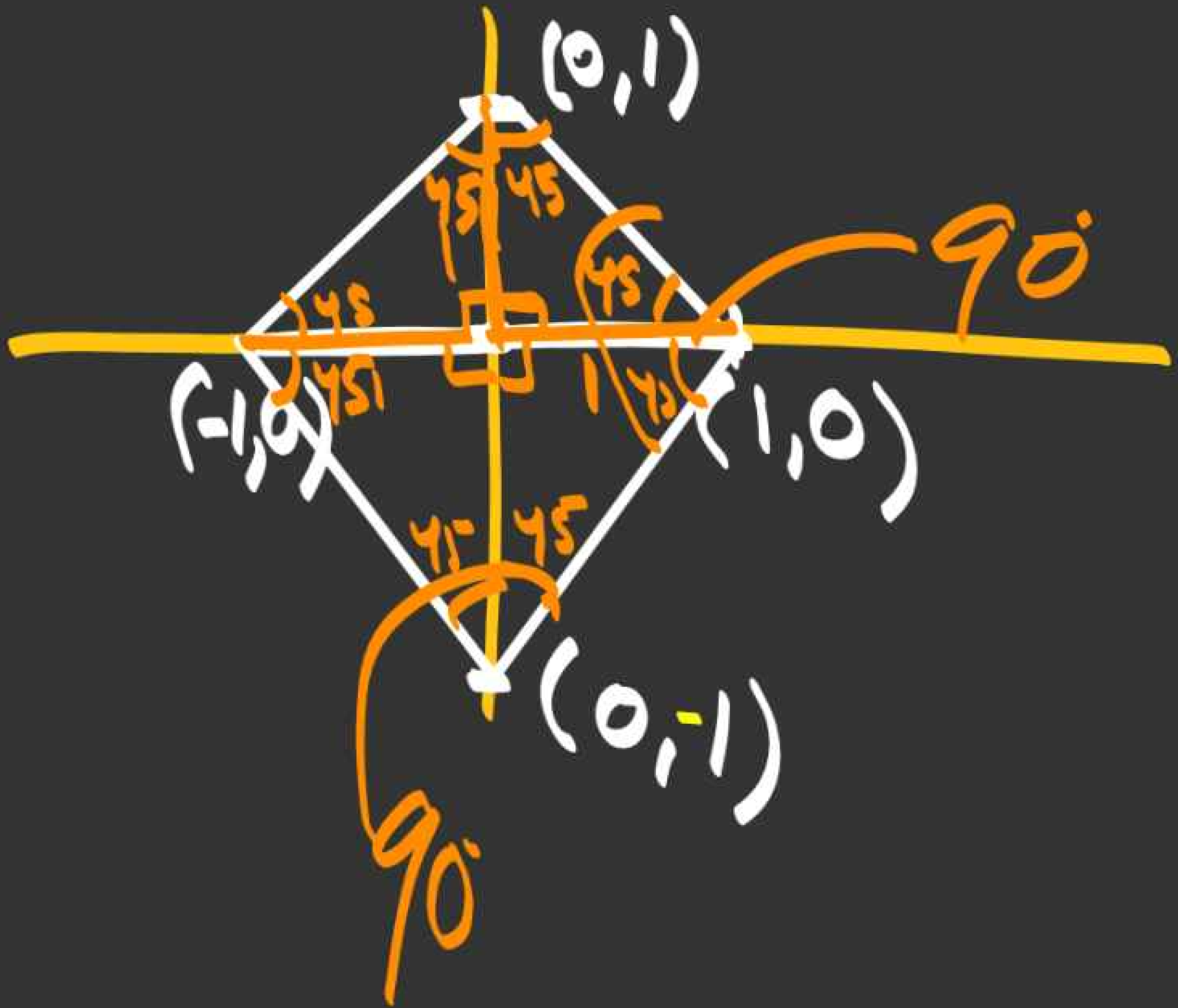
$\Rightarrow \int_{x=-1}^{1} \left[\frac{y^3}{3} - xy\right]_{-1}^{1} dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{3} - x + \frac{1}{3} - x\right] dx \Rightarrow \int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{3} - 2x\right) dx$

$\Rightarrow \left[\frac{2}{3}x - x^2\right]_{-1}^{1}$

$\Rightarrow \frac{2}{3} - 1 + \frac{2}{3} + (-1)^2$

$\Rightarrow 4/3$

(1,0), (-1,0) , (0,1), (0,-1)



Answer $= \frac{4}{3}$

GREEN'S THEOREM IN THE PLANE.

Let R be a closed bounded region in the x-y plane whose boundary C consists of finitely many smooth curves. Let M and N be continuous functions of x and y having continuous partial derivatives $\frac{\partial M}{\partial y}$ and $\frac{\partial N}{\partial x}$ in R. Then

मान लीजिए R, x-y तल में एक बंद परिबद्ध क्षेत्र है जिसकी सीमा C में परिमित रूप से कई चिकने वक्र हैं। मान लीजिए M और N, x और y के सतत फलन हैं जिनके R में सतत आंशिक अवकलज $\frac{\partial M}{\partial y}$ और $\frac{\partial N}{\partial x}$ हैं। तब

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy = \oint_C (Mdx + Ndy),$$

the line integral being taken along the entire boundary C of R such that R is on the left as one advances in the direction of integration.

रेखा समाकलन को R की संपूर्ण सीमा C के अनुदिश लिया जाता है, जिससे कि एकीकरण की दिशा में आगे बढ़ने पर R बाईं ओर होता है।

$$\oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy$$

6. **Verify Green's theorem in the plane for**

ग्रीन के प्रमेय को समतल में सत्यापित करें

$$\int_C (x^2 - xy^3)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$$

M N

where C is the square with vertices $(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$.

जहाँ C शीर्षों (0,0),(2,0),(2,2),(0,2) वाला वर्ग है।

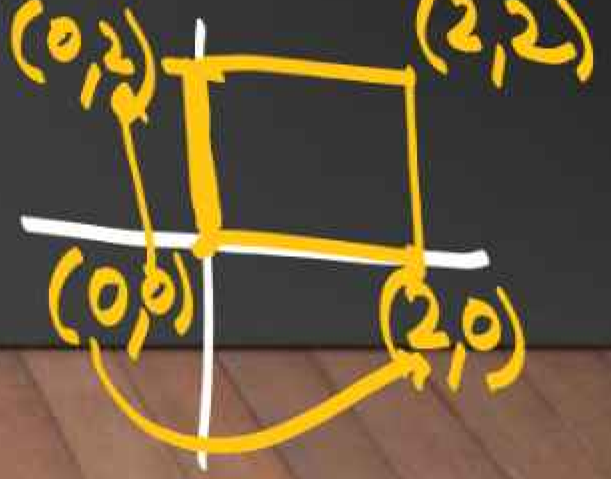
$\frac{\partial N}{\partial x} = -2y \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -3xy^2$

$\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{2}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dx\,dy$

$\int\int_{y=0}^{2}(-2y + 3xy^2)\,dx\,dy$

$\int_{x=0}^{2}\left[-y^2 + xy^3\right]_0^2 dx$

$\int_0^2 (-4 + 8x)\,dx \Rightarrow \left[-4x + 4x^2\right]_0^2 \Rightarrow -8 + 16 \Rightarrow 8$



= 8

7. Evaluate by Green's theorem in plane

समतल में ग्रीन के प्रमेय द्वारा मूल्यांकन करें

$$\int_C (e^{-x}\sin y\,dx + e^{-x}\cos y\,dy)$$

M N

where C is the rectangle with vertices $(0,0), (\pi,0), \left(\pi,\frac{1}{2}\pi\right), \left(0,\frac{1}{2}\pi\right)$.

जहाँ C शीर्षों $(0,0), (\pi,0), \left(\pi,\frac{1}{2}\pi\right), \left(0,\frac{1}{2}\pi\right)$ वाला आयत है।

$\frac{\partial N}{\partial x} = -e^{-x}\cos y$

$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{-x}\cos y$

$\int M dx + N dy = \iint \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$

$\Rightarrow \iint (-e^{-x}\cos y - e^{-x}\cos y)\,dx\,dy$

$\Rightarrow -2\int\int_0^{\pi/2} (e^{-x}\cos y)\,dx\,dy$

$\Rightarrow -2\int_{x=0}^{\pi} \left[e^{-x}\sin y\right]_0^{\pi/2} dx \Rightarrow -2\int_{x=0}^{\pi} e^{-x}dx \Rightarrow +2\left[-e^{-x}\right]_0^{\pi} \Rightarrow 2\left[e^{-\pi} - e^{-0}\right]$

$\Rightarrow 2(e^{-\pi} - 1)$

$$= 2(e^{-\pi} - 1)$$

8. If $\mathbf{F} = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ and $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, find the value of $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ around the rectangular boundary $x = 0, x = a, y = 0, y = b$.

यदि $\mathbf{F} = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ और $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ तो आयताकार सीमा $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ के चारों ओर $\int F \cdot dr$ का मान ज्ञात कीजिए।

$F \cdot dr = (x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy$

$\int F \cdot dr$

$\int (x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy$
(M) (N)

$\iint_{y=0}^{b} (2y + 2y)\,dx\,dy$

$4 \int_{x=0}^{a} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^b dx$

$\Rightarrow 4 \int_0^a \left[\frac{b^2}{2}\right] dx \Rightarrow \frac{4}{2}\left[\frac{b^2 x}{2}\right]_0^a \Rightarrow 2ab^2$

$$= 2ab^2.$$