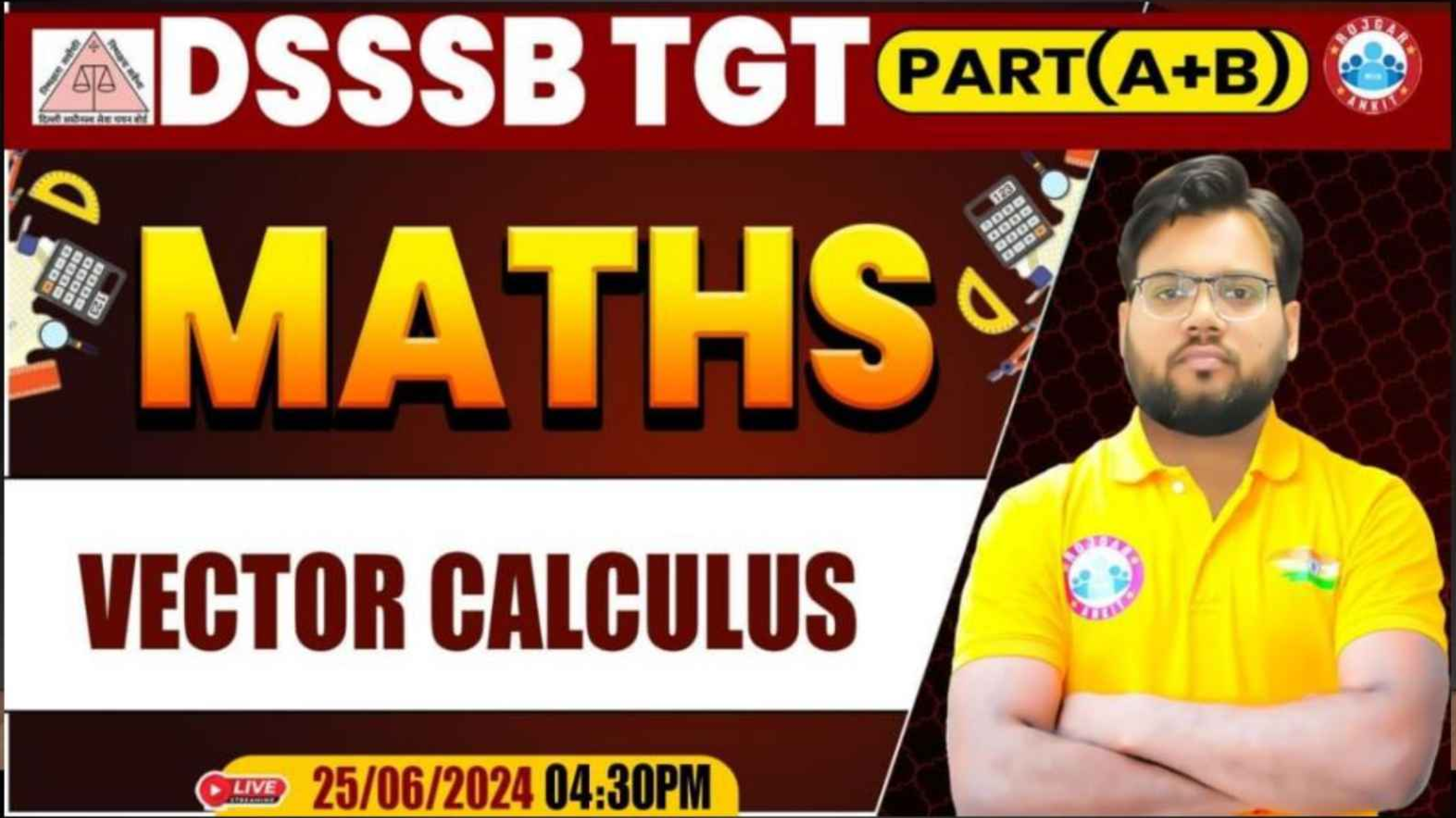

DSSSB TGT
PART(A+B)
MATHS
VECTOR CALCULUS
LIVE
25/06/2024 04:30PM

Vector Calculus

- ⇒ Partial Diff.
- ⇒ Asymptotes
- ⇒ Curvature
- ⇒ Envalope
- ⇒ Max^m & min^m

$f(x)\,m$

$C = 0$

$y = mx + C$

$m = +1$ पर

$y = x$

$m = -1$ पर

$y = -x$

$y^2x^2 - y^2a^2 - x^4 + 4ax^2 = 0$

put ⇒ $y = m$, $x = 1$

$m^2 - 1 = 0$ ⇒ $2m$ diff

$m^2 = 1$

$m = \pm 1$

Parallel to y-axis

$x^2 - a^2 = 0$

$x^2 = a^2$

$x = \pm a$

Maximum power ⇒ 4

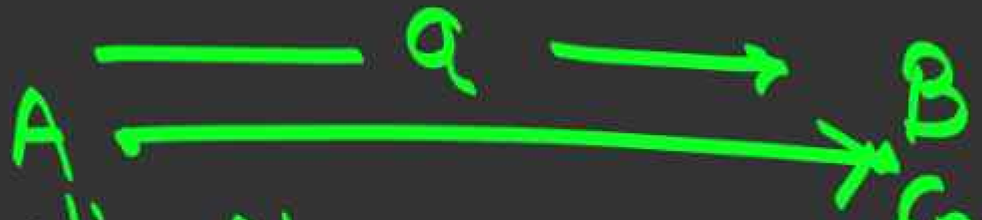
⇒ (Power − 1) ⇒ 3

Vector Calculus

Physical quantity

- Scalar (अदिश)
  - द्रव्यमान, चाल, दुरी
- vector (सदिश)
  - बल, वेग

property of vector →



Starting pt

Initial pt

Ending point

Terminal pt

$\vec{AB}$

$\vec{a}$

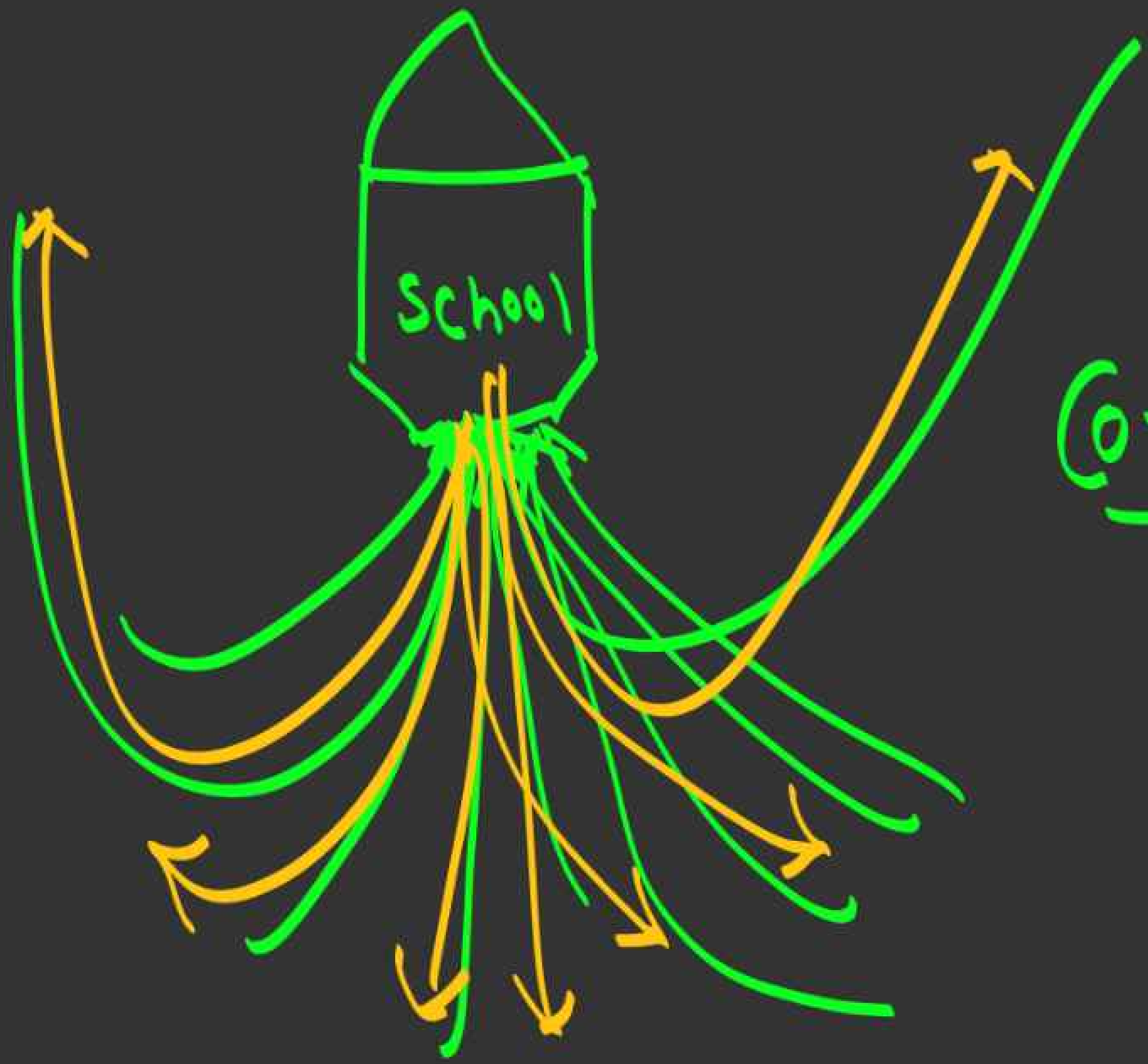
Zero Vector → Starting, Ending

Unit vector → $\hat{a}$

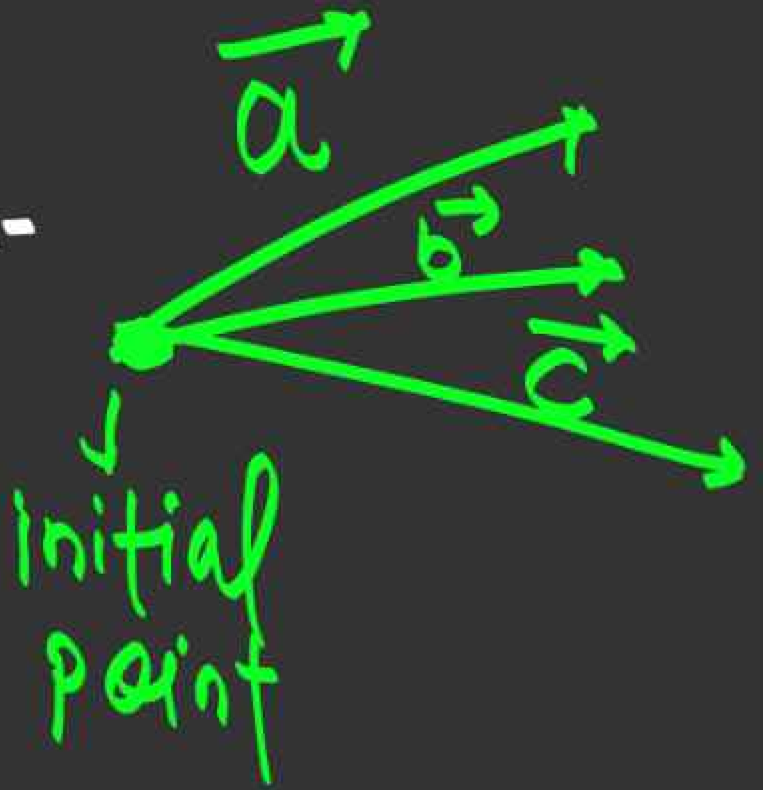
$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$

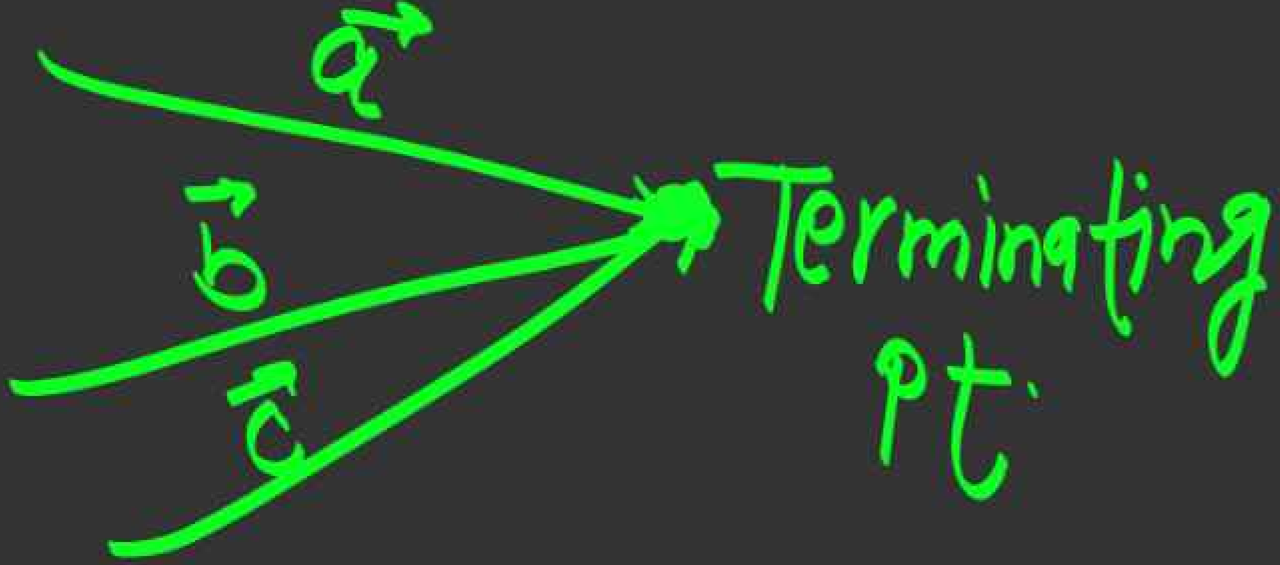
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



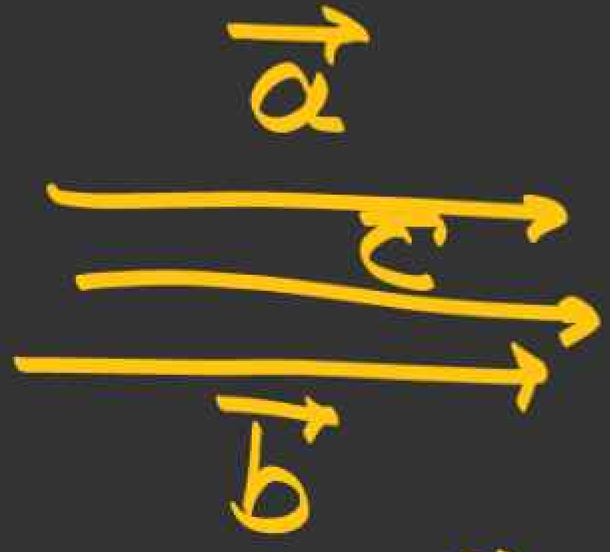
Co-initial Vector :-



Co-Terminal vector →



Equal vector →



$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$

Negative vector →

$\vec{b} = -\vec{a}$

The Vector Differential Operator :

|Del (∇)|

(सदिश अवकल संकारक : डेल (∇))

सदिश संकारक ∇ को निम्न प्रकार परिभाषित करते है:

$$\nabla \equiv i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j\frac{\partial}{\partial z}k$$

यह एक अवकल संकारक है जिसे डेल या नेबला (Nabla) पढ़ते है।

Scalar Point Function (अदिश बिन्दु फलन)

माना समष्टि के बिन्दुओं का एक क्षेत्र R है। यदि R के प्रत्येक बिन्दु $P(x, y, z)$ के संगत किसी नियम द्वारा एक अदिश राशि $\phi(P)$ या $\phi(x, y, z)$ प्राप्त होती हो तो ϕ क्षेत्र R में एक अदिश बिन्दु फलन (scalar point function) कहलाता है।

उदाहरण :

(1) किसी वस्तु की मात्रा

(2) घनत्व

(3) तापमान (किसी क्षण पर)

Scalar Field (अदिश क्षेत्र) : किसी क्षेत्र R के बिन्दुओं का समुच्चय (set) तथा उन बिन्दुओं पर सदिश ϕ फलन मिलकर एक अदिश क्षेत्र कहलाता है।

Example -1 किसी माध्यम मे तापमान वितरण (temperature distribution)

Example - 2 द्रव्यमानों के एक निकाय का गुरुत्वीय विभव (gravitational potential)

Example - 3 आवेशों के एक निकाय का एक स्थिर विद्युत विभव (electostatic potential)

Vector Point Function (सदिश बिन्दु फलन):

यदि R के प्रत्येक बिन्दु के संगत किसी नियम द्वारा एक सदिश V(P) या $V(x, y, z)$ प्राप्त हो तो V क्षेत्र R में एक सदिश बिन्दु फलन (vector point function) कहलाता है।

उदाहरण - गतिमान तरल पदार्थ के किसी बिन्दु का किसी क्षण पर वेग, विद्‌युतीय अथवा चुम्बकीय क्षेत्र के किसी बिन्दु का विद्‌युतीय अथवा चुम्बकीय तीव्रता का बल इत्यादि

Vector Field (सदिश क्षेत्र)

Example 1. गतिमान तरल पदार्थ का किसी क्षण का वेग।

Example 2. विद्युतीय तीव्रता का बल

Example 3. चुम्बकीय तीव्रता का बल।

Gradient of a Scalar Point Function

(अदिश बिन्दु फलन की प्रवणता)

Definition: यदि f (x, y, z) किसी क्षेत्र के प्रत्येक बिन्दु (x,y,z) पर एक संतत अवकलनीय अदिश बिन्दु फलन हो, तो f की प्रवणता को grad f से व्यक्त करते है तथा निम्न प्रकार परिभाषित की जाती है:

$$\text{grad } f = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)f = i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} +, k\frac{\partial f}{\partial z}$$

…… (i)

The operatior ∇ (संकारक ∇) : परिभाषा:

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k \equiv i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} + k\frac{\partial}{\partial z} \ldots$$

(2)

यह संकारक डेल (Del) या नेबला (nabla) कहलाता है।

अतः $\nabla f = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)f$ ….. (3)

$\therefore \text{grad } f = \nabla f$ (4)

अर्थात $\nabla f = \sum i \frac{\partial f}{\partial x}$

इस परिभाषा से स्पष्ट है कि किसी अदिश बिन्दु फलन f की प्रवणता अर्थात grad f एक सदिश है जिसके निर्देशी अक्षों के समान्तर घटक क्रमशः $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ और $\frac{\partial f}{\partial z}$ है।

Q. If $\mathbf{r} = (t+1)\mathbf{i} + (t^2+t+1)\mathbf{j} + (t^3+t^2+t+1)\mathbf{k}$, find $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ and $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$. ✓

$$\frac{dr}{dt} = i + (2t+1)j + (3t^2+2t+1)k$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = 0 + 2j + (6t+2)k$$

Q. If $\mathbf{r} = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, find

(i) $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, $= \cos t\, i - \sin t\, j + k$

(ii) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$, $= -\sin t\, i - \cos t\, j$

(iii) $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|$, $= \sqrt{(\cos t)^2 + (-\sin t)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

(iv) $\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|$. $= \sqrt{(-\sin t)^2 + (-\cos t)^2} = \sqrt{1} = 1$

Q. If $\mathbf{r} = e^{nt}\mathbf{a} + e^{-nt}\mathbf{b}$, where **a**, **b** are constant vectors, show that $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - n^2\mathbf{r} = 0$.

$$\frac{dr}{dt} = ne^{nt}a - ne^{-nt}b$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = n^2e^{nt}a + n^2e^{-nt}b$$

$$n^2(e^{nt}a + e^{-nt}b)$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = n^2r$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} - n^2r = 0$$