DSSSB TGT PART(A+B)

MATHS

CALCULUS
(ENVELOPE & EVOLUTE)

Part -2

LIVE STREAMING

21/06/2024 04:30PM

1. Find the asymptotes for the hyperbola $9x^2 - 16y^2 = 144$.

अतिपरवलय $9x^2 - 16y^2 = 144$ के लिए अनंन्तस्पर्शी खोजें।

(a) $y = \pm\frac{3}{4}x$

(b) $y = \pm\frac{5}{4}x$

(c) $y = \pm\frac{7}{4}x$

(d) इनमें से कोई नहीं

2. $x^3 + 3x^2$ *is an asymptote of* $y - 4y^3 - x + y + 3 = 0$:

$x^3 + 3x^2y - 4y^3 - x + y + 3 = 0$ की एक अनन्तस्पर्शी है:

(a) $y + x = 1$

(b) $y - x = 0$

(c) $2y + x = 0$

(d) $2y - x = 0$

3. Find all the asymptotes of the curve.

वक्र के सभी अनंतस्पर्शी रेखाएँ ज्ञात कीजिए।

$$3x^3 + 2x^2y - 7xy^2 + 2y^3 - 14xy + 7y^2 + 4x + 5y = 0$$

ENVELOPES

The envelope of a one parameter family of curves is the locus of the limiting positions of the points of intersection of any two members of the family when one of them tends to coincide with the other which is kept fixed.

एक पैरामीटर वक्र परिवार का लिफाफा परिवार के किसी भी दो सदस्यों के प्रतिच्छेद बिंदुओं की सीमित स्थितियों का बिन्दुपथ है, जब उनमें से एक दूसरे के साथ मेल खाता है जिसे स्थिर रखा जाता है।

Thus the envelope of a family of curves is the locus of the points of intersection of consecutive members of the family.

इस प्रकार वक्रों के परिवार का लिफाफा उस परिवार के क्रमागत सदस्यों के प्रतिच्छेद बिन्दुओं का बिन्दुपथ होता है।

SOME IMPORTANT CONDITIONS

4. $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$, for every value of m it will touch $x^2 + y^2 = a^2$.

$y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}, m$ के प्रत्येक मान के लिए यह $x^2 + y^2 = a^2$ को स्पर्श करेगा।

➢ $x^2 + y^2 = a^2$ This is the equation of a circle.

$x^2 + y^2 = a^2$ यह एक वृत का समीकरण है।

- If we study slope foam in equation of tangent in circle then we read it there.

Circle में equation of tangent में Slope foam पढ़ते है तो वहाँ पर हम पढ़ते है।

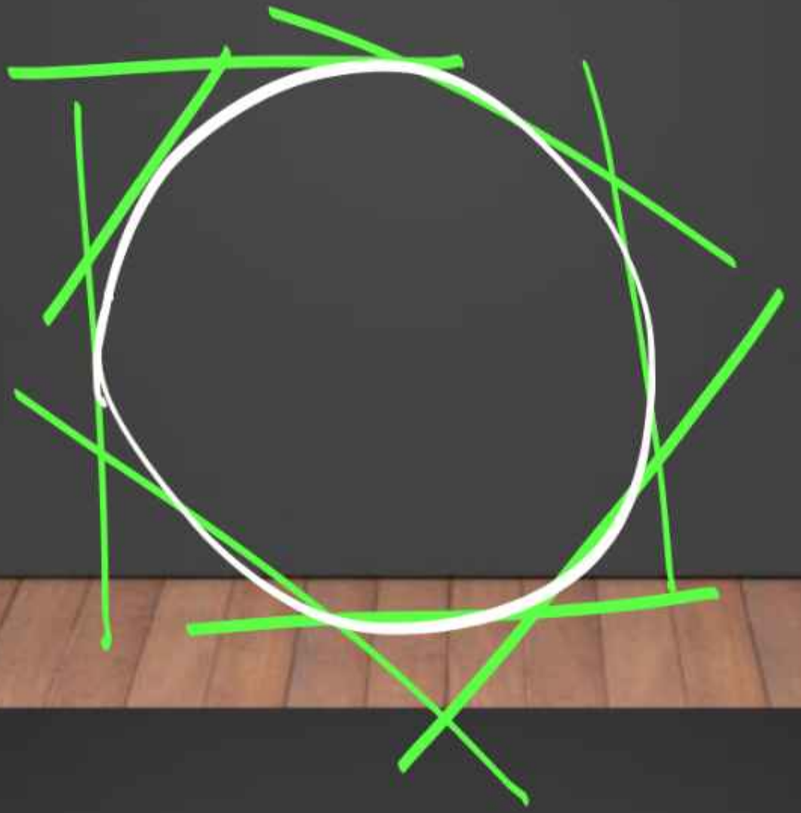
$C = \pm a\sqrt{1+m^2}$ This is the slope foam of the equation of tangent of the circle.

$C = \pm a\sqrt{1+m^2}$ ये Circle के equation of tangent की Slope foam है।

The envelope of $y = m\,x \pm a\sqrt{1+m^2}$ is $x^2 + y^2 = a^2$.

$y = m\,x \pm a\sqrt{1+m^2}$ का Envelope $x^2 + y^2 = a^2$ है।

$y = mx + c$



5. $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ $Envelope \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $ELLIPSE$

$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ का Envelope $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ दीर्घवृत

6. Envelope of $y = mx + \frac{a}{m}$ on $y^2 = 4ax\ (Parabola)$

$y = mx + \frac{a}{m}$ का Envelope $y^2 = 4ax$ पर वलय

METHOD OF FINDING THE ENVELOPE.

Working Rule. The equation of the envelope of the family of curves $F(x, y, \alpha) = 0$ where α is the parameter, is obtained by eliminating α between the equations.

कार्य नियम: वक्रों के परिवार $F(x,y,\alpha) = 0$ के लिफाफे का समीकरण, जहाँ α पैरामीटर है, समीकरणों के बीच α को हटाकर प्राप्त किया जाता है।

$F(x, y, \alpha) = 0$ and $\frac{\partial F(x,y,\alpha)}{\partial \alpha} = 0$.

Here $\frac{\partial F(x,y,\alpha)}{\partial \alpha}$ is the partial derivative of $F(x, y, \alpha)$ with respect to the parameter α while x and y have been regarded as constants.

यहाँ $\frac{\partial F(x,y,\alpha)}{\partial \alpha}$ पैरामीटर α के संबंध में $F(x, y, \alpha)$ का आंशिक व्युत्पन्न है जबकि x और y को स्थिरांक माना गया है।

7. Find the envelope of the family of straight lines $y = mx + \frac{a}{m}$, the parameter being m.

सरल रेखाओं $y = mx + \frac{a}{m}$ के परिवार का लिफाफा ज्ञात करें, पैरामीटर m है।

$y = mx + \frac{a}{m}$

$my = m^2x + a$

$m^2x - my + a = 0$

$B^2 - 4AC = 0$

$(-y)^2 - 4 \times x \times a = 0$

$y^2 = 4ax$

8. Find the envelope of the family of curve of straight lines.

सीधी रेखाओं के वक्र परिवार का लिफाफा ज्ञात कीजिए।

$x \cos x + y \sin x = a$, x being parameter.

ENVELOPE IN CASE THE EQUATION OF THE FAMILY OF CURVES IS A QUADRATIC IN THE PARAMETER.

which is the required equation of the envelope.

जो ENVELOP का आवश्यक समीकरण है।

Remember. The envelope of the family of curves $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$,

याद रखें। वक्रों के परिवार का [redacted] $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$,

अन्वालोप

where A, B, C are functions of x and y, is.

जहाँ A, B, C x और y के फलन हैं, है।

$$B^2 - 4AC = 0.$$

$B^2 - 4AC = 0$

$A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$

(α - parameter)

9. $y = m^2 x + (1/m^2)$, the parameter being m.

10. $y = mx + a\sqrt{(1 + m^2)}$, the parameter being m.

11. $y = mx + am^3$, the parameter being m.

12. $y = mx + am^p$, the parameter being m.

13. $x\,cosec\,\theta - y\,cot\,\theta = c$, the parameter being θ.

14. $x\,cos^3\,\alpha + y\,sin^3\,\alpha = a$, the parameter being α.

15. **Find the envelope of the family of circles**

$$x^2 + y^2 - 2ax\cos\alpha - 2ay\sin\alpha + c^2 = 0, (a^2 > c^2)$$

where α is the parameter, and interpret the result.

$m^2y = m^4x + 1$

$m^4x - m^2y + 1 = 0$

$B^2 - 4AC = 0$

$y^2 - 4 \times x \times 1 = 0$

$\boxed{y^2 = 4x}$

$y = m^2x + \frac{1}{m^2}$ — (i)

$y = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

$y = \sqrt{x} + \sqrt{x}$

$y = 2\sqrt{x}$

$\boxed{y^2 = 4x}$

parameter - m

Envalope

$\frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{-2}{x^3}$

differtiate w.r.t. m

$0 = 2mx - \frac{2}{m^3}$

$2mx = \frac{2}{m^3}$

$m^4 = \frac{1}{x}$

$m^2 = \frac{1}{\sqrt{x}}$ — (ii)

Maxima & Minima of functions of two variables:

दो चरों वाले कार्यों का अधिकतम और न्यूनतम:

$y = x$

Necessary Condition for maxima & Minima:

अधिकतम एवं न्यूनतम के लिए आवश्यक शर्त:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

Maximum

उच्चिष्ठ

Minimum

निम्निष्ठ

Sufficient Condition (पर्याप्त प्रतिबन्ध):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

❖ फलन $f(x,y)$ के चरम मान (EXTREME VALUES OF f(x,y)):

1. <u>आवश्यक प्रतिबन्ध (Necessary Condition)</u>:-

(a,b) फलन $f\ (x,y)$ का चरम मान होगा यदि $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a,b)} = 0 = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(a,b)}$

2. पर्याप्त प्रतिबन्ध (Sufficient Condition):

यदि $r = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(a,b)}$, $s = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{(a,b)}$, $t = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(a,b)}$

$r = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(a,b)}$, $s = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{(a,b)}$, $t = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(a,b)}$

❖ $f(a,b)$ फलन $f(x,y)$ का चरम मान $[Extrema\ Value]$ होगा-

यदि-

(i) $rt - s^2 > 0$ तथा $r < 0$ हो तो, $f(a,b)$ फलन $f(x,y)$ का उच्चिष्ठ मान होता है।

(ii) $rt - s^2 > 0$ तथा $r \geq 0$ हो, तो $f(a,b)$ फलन $f(x,y)$ का निम्निष्ठ मान होता है।

(iii) $rt - s^2 < 0$ तो $f(a,b)$ फलन $f(x,y)$ का चरम मान नहीं होता अर्थात $f(a,b)$ ना तो उच्चिष्ठ ना ही निम्निष्ठ

(iv) $rt - s^2 = 0$ हो तो स्थिती संदिग्ध अर्थात जाँच विफल आगे और जाँच की आवश्यकता है।

Doubtful

❖ स्तब्ध बिन्दु (Stationary Points):

❖ All values of (x,y) for which $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0 = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ do not give extreme values of f(x,y). Hence, the values of (x,y) for which f^' (x,y)=0 may be either critical points or points of inflexion of the function f(x,y).

(x, y) के वे सभी मान जिसके लिए $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0 = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ हो $f(x, y)$ के चरम मान नहीं देते अतः (x, y) के ऐसे मान जिनके लिए $f'(x, y) = 0$ फलन $f(x, y)$ के स्तब्ध मान (Critical points) या क्रान्तिक मान या नति परिवर्तन बिन्दु (Point of inflexion) हो सकते है।

at (-3,0)

$f(x,y) = x^2+y^2+6x+12$

$f(x,y) = (-3)^2+0+6(-3)+12$

$9-18+12$

Minimum value $\Rightarrow\Rightarrow 3$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x+6 = 0$

$x = -3$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$

$y = 0$

$(-3,0)$

1:00 pm

$r = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(-3,0)} = 2$

$s = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{(-3,0)} = 0$

$t = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = 2$

$rt - s^2 = 2\times 2 - 0$

$4 > 0$

$r = 2 > 0$

Minimum value at (-3,0)