



DSSSB TGT

PART (A+B)



MATHS

CALCULUS (ENVELOPE & EVOLUTE)



20/06/2024 04:30PM



$$x=1, y=m$$

$$9-16m^2=0$$

$$m^2 = \frac{9}{16}$$

$$m = \pm \frac{3}{4}$$

$$y = mx + c$$

$$y = \pm \frac{3}{4}x$$

1. Find the asymptotes for the hyperbola $9x^2 - 16y^2 = 144$.

अतिपरवलय $9x^2 - 16y^2 = 144$ के लिए अनन्तस्पर्शी खोजें।

$$(a) y = \pm \frac{3}{4}x$$

$$(b) y = \pm \frac{5}{4}x$$

$$(c) y = \pm \frac{7}{4}x$$

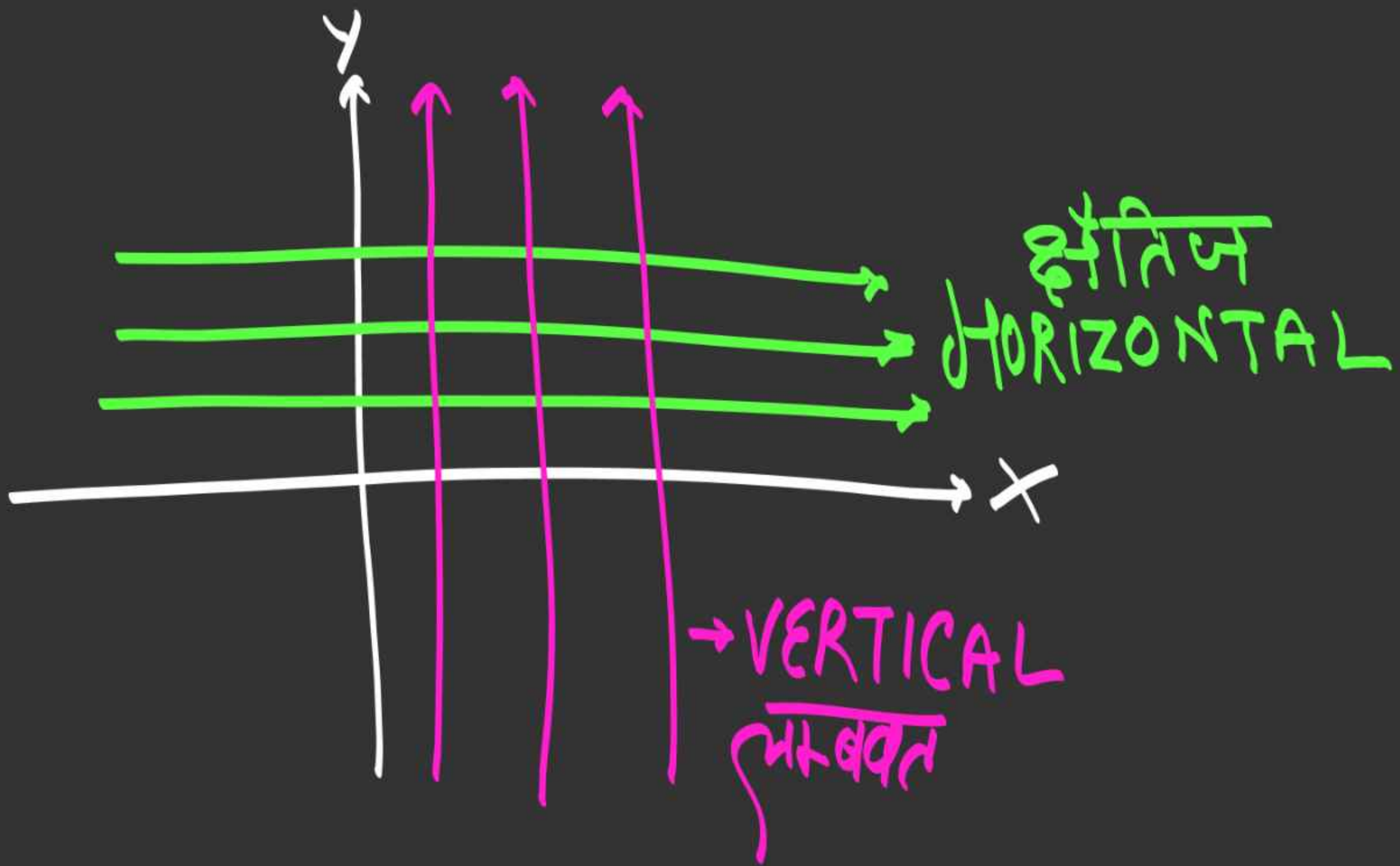
(d) इनमें से कोई नहीं

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1$$

$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$



put $x=1, y=m$

$$1+3m-4m^3=0$$

$$4m^3-3m-1=0$$

$$m=1 \checkmark$$

$$\boxed{m=1}$$

$$y = mx + c$$

$$y = x$$

$$\boxed{y-x=0}$$

2. $x^3 + 3x^2$ is an asymptote of $y - 4y^3 - x + y + 3 = 0$:

$\underline{x}^3 + \underline{3x^2y} - \underline{4y^3} - \underline{x} + \underline{y} + 3 = 0$ की एक अनन्तस्पर्शी है:

(a) $y + x = 1 \checkmark$

(b) $y - x = 0$

(c) $2y + x = 0$

(d) $2y - x = 0$

$$\boxed{-1+m}$$

$$\boxed{m-1}$$

$$C = \underline{-(m-1)}$$

Put $x=1, y=m$

$$3 + 2m - 7m^2 + 2m^3 = 0$$

$$2m^3 - 7m^2 + 2m + 3 = 0$$

$$(m=1)$$

$(m-1)$ एक factor

$$2m^2(m-1) - 5m(m-1) - 3(m-1) = 0$$

$$(m-1)(2m^2 - 5m - 3) = 0$$

$$(m-1) \left(\begin{array}{c} x \\ + -6 \\ -5 \end{array} -6, +1 \right)$$

$$m=1, -1, 6$$

3. Find all the asymptotes of the curve.

वक्र के सभी अनंतस्पर्शी रेखाएँ ज्ञात कीजिए।

$$3x^3 + 2x^2y - 7xy^2 + 2y^3 - 14xy + 7y^2 + 4x + 5y = 0$$

$$x=1 \quad y=m$$

$$f_{(n-1)}(m) \Rightarrow -14m + 7m^2$$

$$C = \frac{-f_{(n-1)}(m)}{f'_n(m)} \Rightarrow$$

$$\frac{14m - 7m^2}{6m^2 - 14m + 2}$$

$$\text{at } m=1 \\ m=-1 \\ m=6$$

$$\begin{array}{l} 8y - 24x + 7 = 0 \\ 6y + 3x + 5 = 0 \\ 6y - 6x + 7 = 0 \end{array}$$

$$y = mx + C$$

वृत्तीय अनन्तस्पर्श (Circular Asymptotes):-

$r = \frac{a\theta + b}{\theta + c}$ की वृत्तीय
अनन्तस्पर्श:-?

यदि वक्र का समी
 $r = f(\theta)$ हो वक्र की अनन्तस्पर्श

$$r = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{a\theta + b}{\theta + c}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\theta(a + \frac{b}{\theta})}{\theta(1 + \frac{c}{\theta})}$$

$$r = a$$

$$\Rightarrow \frac{a+0}{1+0} = r$$

$$r = \lim_{\theta \rightarrow \infty} f(\theta)$$

ENVELOPES अन्वलाप

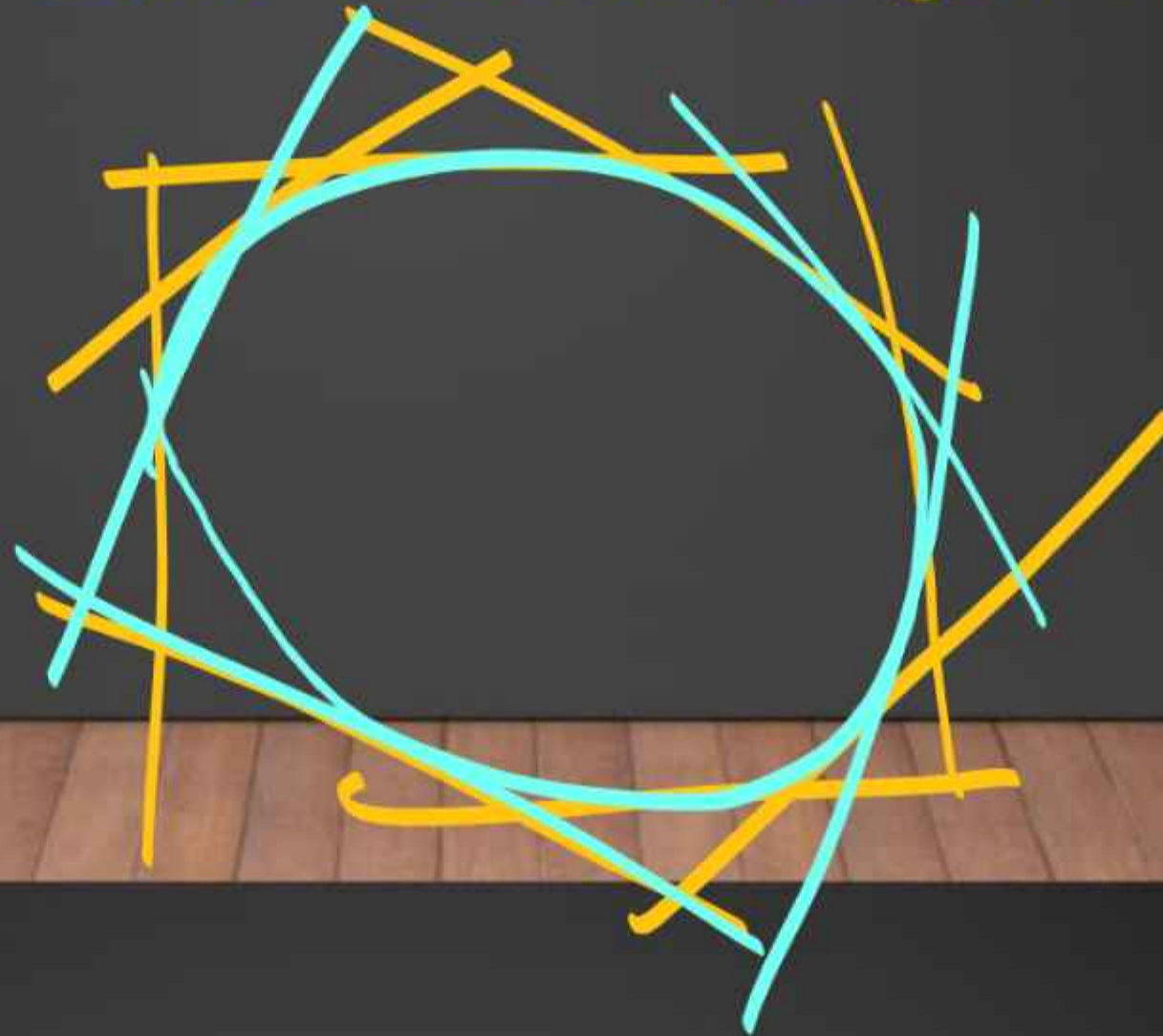
The envelope of a one parameter family of curves is the locus of the limiting positions of the points of intersection of any two members of the family when one of them tends to coincide with the other which is kept fixed.

एक पैरामीटर वक्र परिवार का **Envelope** परिवार के किसी भी दो सदस्यों के प्रतिच्छेद बिंदुओं की सीमित स्थितियों का बिन्दुपथ है, जब उनमें से एक दूसरे के साथ मेल खाता है जिसे स्थिर रखा जाता है।

Thus the envelope of a family of curves is the locus of the points of intersection of consecutive members of the family.

$$y = mx + c$$


इस प्रकार वक्रों के परिवार का **ENVELOPE** उस परिवार के क्रमागत सदस्यों के प्रतिच्छेद बिन्दुओं का बिन्दुपथ होता है।



$$x^2 + y^2 = a^2 \rightarrow \text{वृत्त का समी.}$$

$$y = mx + c$$

SOME IMPORTANT CONDITIONS

4. $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$, for every value of m it will touch $x^2 + y^2 = a^2$.

$y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$, m के प्रत्येक मान के लिए यह $x^2 + y^2 = a^2$ को स्पर्श करेगा।

$$y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$$

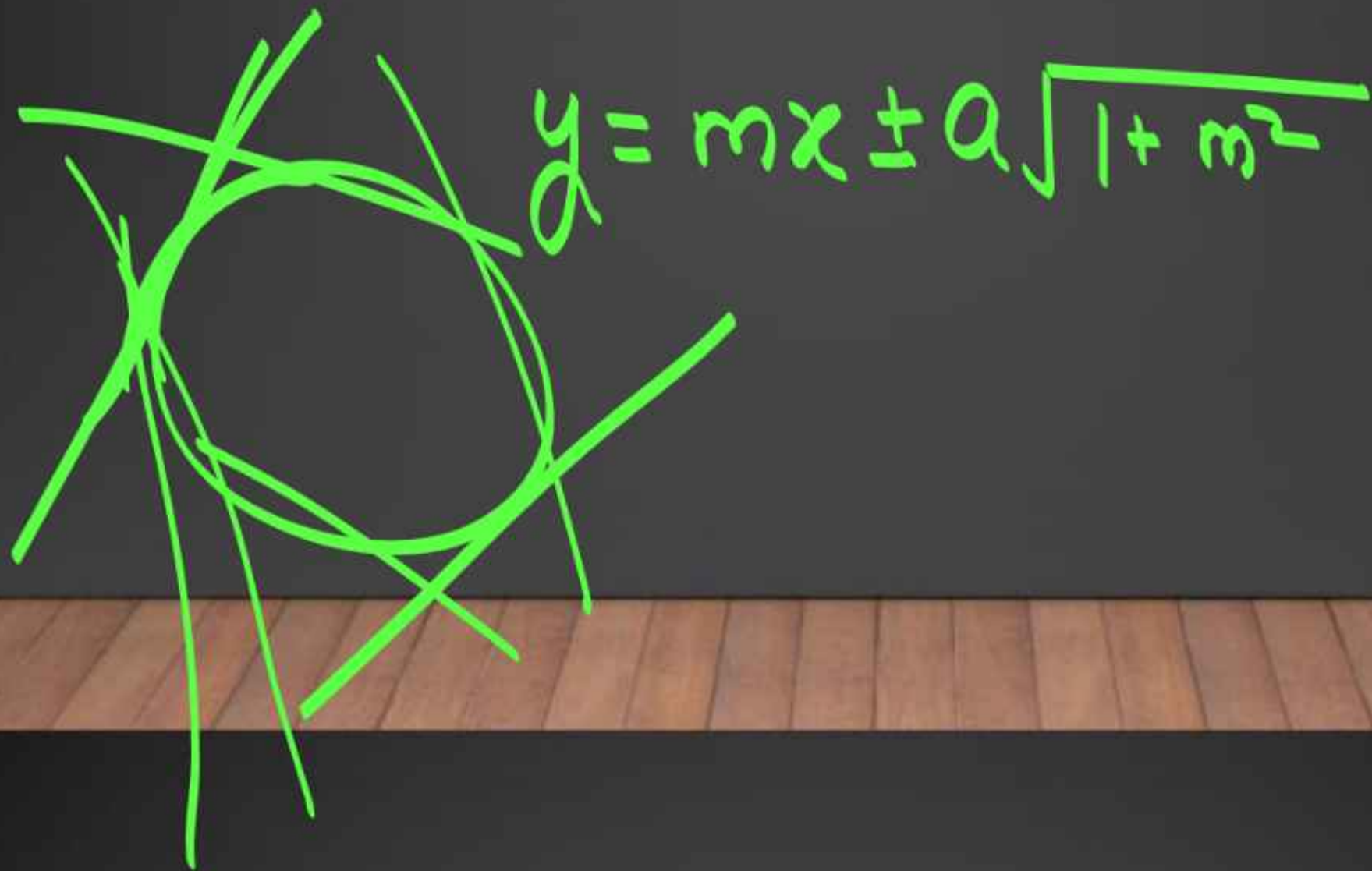


➤ $x^2 + y^2 = a^2$ This is the equation of a circle.

$x^2 + y^2 = a^2$ यह एक वृत्त का समीकरण है।

➤ If we study slope form in equation of tangent in circle then we read it there.

Circle में equation of tangent में Slope form पढ़ते है तो वहाँ पर हम पढ़ते है।



$C = \pm a\sqrt{1+m^2}$ This is the slope form of the equation of tangent of the circle.

$C = \pm a\sqrt{1+m^2}$ ये Circle के equation of tangent की Slope form है।

$$y = mx + c$$

$$y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

The envelope of $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$ is $x^2 + y^2 = a^2$.

$y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$ का Envelope $x^2 + y^2 = a^2$ है।

5. $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ Envelope $\frac{x^2}{a^2} +$

$\frac{y^2}{b^2} = 1$ ELLIPSE

$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ का Envelope $\frac{x^2}{a^2} +$

$\frac{y^2}{b^2} = 1$ दीर्घवृत्त

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

दीर्घवृत्त
ELLIPSE

6. Envelope of $y = mx + \frac{a}{m}$ on $y^2 =$

$4ax$ (Parabola)

$y = mx + \frac{a}{m}$ का Envelope $y^2 = 4ax$ पर
परवलय

$$x = \frac{0}{3/2}$$
$$m = \frac{0}{3/2}$$

$$y^2 = 4ax$$

METHOD OF FINDING THE ENVELOPE.

Working Rule. The equation of the envelope of the family of curves $F(x, y, \alpha) = 0$ where α is the parameter, is obtained by eliminating α between the equations.

कार्य नियम: वक्रों के परिवार $F(x, y, \alpha) = 0$ के **ENVELOPE** का समीकरण, जहाँ α पैरामीटर है, समीकरणों के बीच α को हटाकर प्राप्त किया जाता है।

$$F(x, y, \alpha) = 0 \text{ and } \frac{\partial F(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} = 0.$$

$$f(x, y, \alpha) = 0 \text{ — (i)}$$
$$\frac{\partial f(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} = 0 \text{ — (ii)}$$

(i) व (ii) से
 α को खत्म
करना है।

Here $\frac{\partial F(x, y, \alpha)}{\partial \alpha}$ is the partial derivative of $F(x, y, \alpha)$ with respect to the parameter α while x and y have been regarded as constants.

यहाँ $\frac{\partial F(x, y, \alpha)}{\partial \alpha}$ पैरामीटर α के संबंध में $F(x, y, \alpha)$ का आंशिक व्युत्पन्न है जबकि x और y को स्थिरांक माना गया है।

Constant

7. Find the envelope of the family of straight lines $y = mx + \frac{a}{m}$, the parameter being m .

सरल रेखाओं $y = mx + \frac{a}{m}$ के परिवार का ENVELOPE ज्ञात करें, पैरामीटर m है।

$$y = mx + \frac{a}{m}$$

$$y = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} \times \sqrt{x}$$

$$y = \sqrt{ax} + \sqrt{ax}$$

$$y = 2\sqrt{ax}$$

$$0 = x - \frac{a}{m^2}$$

$$\frac{a}{m^2} = x \Rightarrow m = \sqrt{\frac{a}{x}}$$

$$y^2 = 4ax \rightarrow \text{Parabola}$$

परवलय

8. Find the envelope of the family of curve of straight lines.

सीधी रेखाओं के वक्र परिवार का **ENVELOPE** ज्ञात कीजिए।

(i) — $x \cos \alpha + y \sin \alpha = a$, α being parameter.
diff. w.r.t. α (ii) — $-x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0$

$(i)^2 + (ii)^2$

$$x^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + y^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = a^2$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = a^2}$$