DSSSB TGT PART(A+B)

MATHS

ADVANCE CALCULUS

CURVATURE

LIVE STREAMING

18/06/2024 04:30PM

1. $If\ u = ax^2 + 2hxy + by^2 then$

यदि $u = ax^2 + 2hxy + by^2$ है तो

(a) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$

(b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

(c) $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^{2u}}{\partial y^2}$

(d) $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

2. If $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ then what is the value of $x.\frac{\partial u}{\partial x} + y.\frac{\partial u}{\partial y}$?

यदि $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ है तो $x.\frac{\partial u}{\partial x} + y.\frac{\partial u}{\partial y}$ का मान क्या होगा?

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 0

3. If $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ then what is the value of $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$?

यदि $u = log\,(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ है तो $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$का मान क्या होगा?

(a) $(x + y + z)$

(b) $(x^2 + y^2 + z^2)$

(c) $\frac{3}{x+y+z}$

(d) $\frac{-3}{x+y+z}$

4. If $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2 is} - 1$, then what is the value of $\frac{\partial u}{\partial x}$ and $\frac{\partial u}{\partial y}$?

यदि $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ है, तो $\frac{\partial u}{\partial x}$ व $\frac{\partial u}{\partial y}$ का मान क्या होगा?

(a) $\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}$

(b) $\frac{2x}{a}, \frac{2y}{b}$

(c) $\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}$

(d) $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$

5. *If* $f(x,y) = x\,cosy + y\,sinx$, *then* –

यदि $f(x,y) = x\,cosy + y\,sinx$ है, तब-

(a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

(b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$

(c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

(d) $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$

6. If $u = \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, then What is the value of $\left(x.\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right)$?

यदि $u = sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ है, तो $\left(x.\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ का मान क्या होगा?

(a) 1

(b) 0

(c) 5

(d) -2

7. If $z = x^2 \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$, then what is the value of $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$?

यदि $z = x^2 tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ है, तो $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ का मान क्या होगा?

(a) $\frac{x+y}{x-y}$

(b) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

(c) $\frac{x}{y}$

(d) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

8. If $u = \log(x^2 + y^2)$, then what is the value of $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$?

यदि $u = log(x^2 + y^2)$ है, तो $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ का मान क्या होगा?

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

9. $If\ f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 then -$

यदि $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4$ है तब-

(a) $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_{(1,1)} = 12$

(b) $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_{(1,1)} = 14$

(c) $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_{(1,1)} = 4$

(d) इनमे से कोई नहीं

HOMOGENEOUS FUNCTIONS.

10. x और y में एक व्यंजक जिसमें प्रत्येक पद समान घात का हो, x और y का समरूप फलन कहलाता है। द्वारा परिभाषित फलन पर विचार करें

An expression in x and y in which every term is of the same degree is called a homogeneous function of x and y. Consider the function defined by

$$f(x,y) = a_0x^2 + a_1x^{n-1}\ y + a_2\ x^{n-2}\ y^2 + \ldots + a_{n-1}\ xy^{n-1} + a_ny^n.$$

इस फ़ंक्शन में प्रत्येक पद n डिग्री का है। इसलिए यह x और y का n डिग्री का एक समरूप फ़ंक्शन है। इसके अलावा, (1) को इस प्रकार लिखा जा सकता है

In this function every term is of degree n. Therefore it is a homogeneous function of x and y of degree n. Moreover, (1) may be written as

$$f(x,y) = x^n\left\{a_0 + a_1\left(\frac{y}{x}\right) + a_2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \cdots\ldots + a_n\left(\frac{y}{x}\right)^n\right\}$$

or $f(x,y) = x^nF(y/x),$

EULER'S THEOREM ON HOMOGENEOUS FUNCTIONS.

11. यदि u, x और y का घात n वाला एक समरूप फलन है, तो $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = nu.$

If u be a homogeneous function of x and y of degree n, then $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = nu.$

This proves the theorem.

12. In general, if u be a homogeneous function of $x_1, x_2, \ldots, x_m$ of degree n, then.

सामान्यतः, यदि u $x_1, x_2, \ldots, x_m$ का घात n वाला एक समरूप फलन हो, तो।

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots\ldots + \partial_x \frac{\partial u}{\partial x_m} = nu.$$

13. *If* $u = f(x, y, z)$ **is a homogeneous function of degree** n **in variables** x, y **and** z**, then**

यदि $u = f(x, y, z)$ **चरों** x, y **तथा** z **में** n **घात का समघात फलन हो तो**

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = nu$$

14. If u be a homogeneous function of x and y of degree n, Then.

यदि u, x और y का घात n वाला एक समरूप फलन हो, तो.

(a) $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial x}$.

(b) $x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial y}$

(c) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=n(n-1)u$.

15. If $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + 4y^2$ then what is the value of $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$?

यदि $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + 4y^2$ तो $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ का मान है?

(a) $2f(x, y)$

(b) $3f(x, y)$

(c) $4f(x, y)$

(d) $f(x, y)$

16. If $u = 2x^2 + xy + 4y^2$, then what is the value of $x.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$?

यदि $u = 2x^2 + xy + 4y^2$ है, तो $x.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ का मान क्या होगा?

(a) u

(b) $\frac{\partial u}{\partial x}$

(c) $\frac{\partial u}{\partial y}$

(d) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

वक्रता (Curvature)

$$\text{वक्रता त्रिज्या} = \frac{1}{\text{वक्र की वक्रता}}$$

17. *The curvature of the curve* $xy = a^2$ *at the point* (a, a) *is* –

वक्र $xy = a^2$ **की वक्रता, बिन्दु** (a, a) **पर है-**

(a) $\frac{1}{2^{5/2}.a}$

(b) $\frac{1}{2^{3/2}.a}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}a}$

(d) $2^{5/2}a$

CARTESIAN FORMULA FOR RADIUS OF CURVATURE.

18. $$\int = \frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

19. Find the radius of curvature of the curve $y = 4\sin x - \sin 2x$ at the point $x = \frac{\pi}{2}$.

बिन्दु $x = \frac{\pi}{2}$ पर वक्र $y = 4\sin x - \sin 2x$ की वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

(a) $\frac{5}{4}$

(b) $\frac{5\sqrt{5}}{4}$

(c) $5\sqrt{5}$

(d) $-\frac{5\sqrt{5}}{4}$

20. Find the radius of curvature of the curve $y^2 = 4ax$.

वक्र $y^2 = 4ax$ की वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

(a) $\frac{2(x+a)}{\sqrt{a}}$

(b) $\frac{2(x+a)^{3/2}}{\sqrt{a}}$

(c) $\frac{(x+a)^{3/2}}{2\sqrt{a}}$

(d) $\frac{2(x+a)}{5a}$

$$\rho = \frac{\{1 + y_1^2\}^{3/2}}{y_2}$$

$$y_1 = \frac{dy}{dx}$$

$$y_2 = \frac{d^2y}{dx^2}$$

21. The radius of curvature at $(0, 1)$ for the curve $y = e^x$ is –

वक्र $y = e^x$ के लिए (0,1) पर वक्रता - त्रिज्या है-

(a) $\sqrt{2}$

(b) $2\sqrt{2}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(d) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

22. The radius of curvature of the curve $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2 at\ (0,0) is -$

वक्र $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2$ की (0,0) पर वक्रता त्रिज्या है-

(a) $\frac{1}{12}$

(b) $\frac{1}{24}$

(c) $\frac{1}{36}$

(d) $\frac{1}{48}$

23. *The curvature of the curve* $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ *at the origin is –*

वक्र $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ की मूल बिन्दु की वक्रता है-

(a) 5

(b) 25

(c) $\frac{1}{5}$

(d) शून्य (Zero)

24. Find the radius of curvature at origin for the curve $x^3 + y^3 - 2x^2 + 6y = 0$

वक्र $x^3 + y^3 - 2x^2 + 6y = 0$ के लिए मूल बिन्दु पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

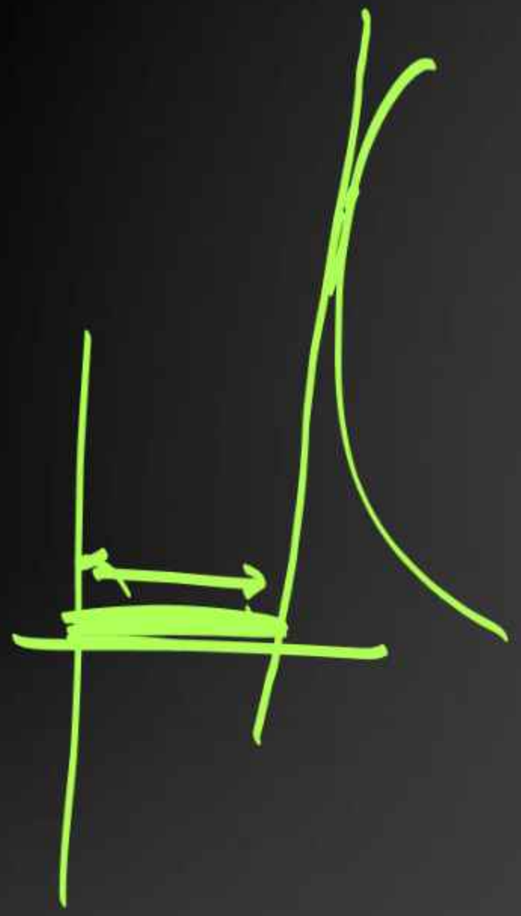
(a) $\frac{2}{3}$

(b) $\frac{3}{2}$

(c) 0

(d) $\frac{4}{3}$

ASYMPTOTES



Definition:- A straight line at a finite distance from the origin to which a tangent to a curve tends, as the distance from the origin of the point of contact tends to infinity, is called an asymptote of the curve.

परिभाषा:- मूल बिंदु से एक निश्चित दूरी पर एक सीधी रेखा जिस पर एक वक्र की स्पर्श रेखा जाती है, क्योंकि संपर्क बिंदु के मूल बिंदु से दूरी अनंत तक जाती है, उसे वक्र की अनंतस्पर्शी रेखा कहा जाता है।

(ii) Asymptotes parallel to x-axis. Proceeding as above, we have the following rule for finding asymptotes parallel to x-axis of a rational algebraic curve:

(ii) x-अक्ष के समांतर अनंतस्पर्शी रेखाएँ। ऊपर बताए अनुसार आगे बढ़ते हुए, हमारे पास एक तर्कसंगत बीजीय वक्र के x-अक्ष के समांतर अनंतस्पर्शी रेखाएँ खोजने के लिए निम्नलिखित नियम है:

The asymptotes parallel to the axis of x are obtained by equating to zero the co-efficient of the highest power of x, in the equation of the curve. In case the coefficient of highest power of x, is a constant or if its factors are all imaginary, there will be no asymptotes parallel to x-axis.

⇒ वक्र के समीकरण में x की उच्चतम घात के गुणांक को शून्य के बराबर करके x की अक्ष के समानांतर अनंतस्पर्शी रेखाएँ प्राप्त की जाती हैं। यदि x की उच्चतम घात का गुणांक स्थिरांक है या यदि इसके सभी कारक काल्पनिक हैं, तो x-अक्ष के समानांतर कोई अनंतस्पर्शी रेखा नहीं होगी।

Asymptotes paralley to y-axis

25. The asymptotes parallel to the axis of y are obtained by equating to zero the coefficient of the highest power of y in the equation of the curve. In case the coefficient of the highest power of y, is a constant or if its linear factors are all imaginary, there will be no asymptotes parallel to y-axis.

वक्र के समीकरण में y की उच्चतम घात के गुणांक को शून्य के बराबर करके y की अक्ष के समानांतर अनंतस्पर्शी रेखाएँ प्राप्त की जाती हैं। यदि y की उच्चतम घात का गुणांक स्थिरांक है या यदि इसके सभी रैखिक कारक काल्पनिक हैं, तो y-अक्ष के समानांतर कोई अनंतस्पर्शी रेखा नहीं होगी।

26. Find the asymptotes of the curve $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$.

$a^2y^2 - x^2b^2 - x^2y^2 = 0$

वक्र $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$ के अनंतस्पर्शी ज्ञात करें। ∥ to y-axis

$a^2y^2 - x^2b^2 = x^2y^2$

$x^2y^2 + x^2b^2 - a^2y^2 = 0$

∥ to x-axis → $x^2(y^2 + b^2)$

$y^2 + b^2 = 0$

$y^2 = -b^2$

$y = \sqrt{-b^2}$

$\Rightarrow \sqrt{-1 \times b^2}$

$\Rightarrow i(\pm b)$

$y = \pm ib$

$y^2(x^2 - a^2)$

$x^2a^2 = 0$

$x^2 = a^2$

$x = \pm a$

$x = a$

$x = -a$

27. Find the asymptotes of the curve $y^2(a^2 - x^2) = x^4$.

वक्र $y^2(a^2 - x^2) = x^4$ के अनंतस्पर्शी ज्ञात करें।

$a^2y^2 - x^2y^2 - x^4 = 0$

|| to x-axis –

No asymptotes

x^4 का गुणांक = −1 (constant)

|| to y-axis

$a^2 - x^2 = 0$

$x^2 = a^2$

$x = \pm a$

$x = a$

$x = -a$

28. Find the asymptotes of the curve $y^2 = 4x$.

वक्र $y^2 = 4x$ के अनंतस्पर्शी ज्ञात करें।

$y^2 - 4x = 0$

x-अक्ष के समानान्तर

x का गुणांक $= -4$ (constant)

No Asymptotes ∥ to x-axis

No asymptotes ∥ to y-axis

$y^2 = 1$ (constant)

29. Find the asymptotes of the curve $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

वक्र $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ के अनंतस्पर्शी ज्ञात करें।

$a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)$

$1+m^3=0 \Rightarrow$ $f'(m)=3m^2$

$(1+m)(1+m^2-m)=0$

$m=-1,$

No asymptotes

|| to x-axis & y-axis

put $x=1$ & $y=m$ in one less power

$C=\frac{\pm(+3am)}{3m^2} \Rightarrow \frac{a}{m}$ $m=-1$ $\boxed{-3am}$

$C=-a$

$y=mx+c$

$y=-x-a$ ✓

$x+y+a=0$ ✓

30. $xy^2 = 4a^2(2a - x)$.

$x(y^2+4a^2)$

$xy^2 - 8a^3 + 4a^2x = 0$

x-अक्ष के समान्तर

$y^2+4a^2 = 0$

$y^2 = -4a^2$

$y = \pm i2a$

y-अक्ष के समान्तर

$x = 0$

31. $x^2 y^2 = a^2 (x^2 + y^2)$.

$x^2y^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = 0$

x- अक्ष के समान्तर

$y^2 - a^2 = 0$

$y^2 = a^2$

$y = \pm a$

$y + a = 0$

$y - a = 0$

y- अक्ष के समान्तर

$x^2 - a^2 = 0$

$x = \pm a$

$x + a = 0$

$x - a = 0$

32. $y^2(x^2 - a^2) = x^2(x^2 - 4a^2)$.

$y^2x^2 - y^2a^2 - x^4 + 4ax^2 = 0$

$f'(m) \Rightarrow 2m$

$m^2 - 1 = 0$

$m = 1, -1$

x-अक्ष के समानान्तर

No - Asymptotes

$f(m,1)^m \rightarrow -m^2a^2 + 4a$

$\Rightarrow -\frac{(-m^2a^2+4a)}{2m}$ at $m = 1$

at $m = -1$

$C = \frac{a^2-4a}{2}$

$\Rightarrow C = \frac{(-a^2+4a)}{-2} \rightarrow \frac{-a^2+4a}{2}$

y-अक्ष के समानान्तर

$x^2 - a^2 = 0$

$x = \pm a$

$x + a = 0$

$x - a = 0$

33. $y^3 = x^2 + 3.$

34. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{-y^2}{b^2} = 1.$

$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

$x^2b^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$

x- अक्ष –

$b^2 = 0$

$b = 0$

y- अक्ष

$-a^2 = 0$

$a = 0$

Step-1:- * In eqn of Curve in terms of highest power put $x=1$ & $y=m$, तो एक function of m ($f_n(m)$) मिलेगा

* $f(m)=0$ रखने के बाद m की values Calculate करनी होंगी

Step-2:- One power less than highest power में $x=1$ & $y=m$ रखने पर $f_{(n-1)}(m)$

$m=1,0,2$

$$y=mx+C$$

$$C=\frac{-f_{(n-1)}(m)}{f'_m}$$