

# Factorial & Number of zeroes

(क्रमगुणित और शून्यों की संख्या)

*coaching center*

## Factorial (क्रमगुणित):

$$\begin{aligned}5! &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120\end{aligned}$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \dots \times 2 \times 1$$

*coaching center*

# Highest power of a number in a factorial:

$\frac{100!}{7^P}$ , Highest value of  $P$  such that it is an integer

$$\begin{array}{r|l} 5 & 100 \\ \hline 5 & 20 \\ \hline & 4 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 24$$

$$\begin{array}{r|l} 7 & 100 \\ \hline 7 & 14 \\ \hline & 2 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 16 \text{ वा}$$

$$\frac{100 \times 99 \times 98 \times \dots \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{7 \times 7 \times 7 \times 7}$$

coaching center

$$100! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times \dots \times 98 \times 99 \times 100$$

$$\begin{array}{r|l} 7 & 100 \\ \hline 7 & 14 \\ \hline & 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 16 \text{ बार} \end{array}$$

$$49 = 7 \times 7$$

$$7^3 = \underline{\underline{343}} \overline{)100}$$

$$\begin{array}{r} 49 \overline{)100} \\ \underline{98} \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \text{ बार} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \overline{)100} \\ \underline{98} \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 14 \text{ बार} \\ 16 \text{ बार} \end{array}$$

coaching center

← Prime

2	30
2	15
	7.5
	3
	1

26 बार

$$30! = 1 \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{4} \times \cancel{5} \times \cancel{6} \times \dots$$

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times \dots \text{ 26 बार}$$

124. What can be the maximum value of  $p$  so that  $\frac{30!}{2^p}$  is an integer?

$p$  का अधिकतम मान क्या हो सकता है कि  $\frac{30!}{2^p}$  एक पूर्णांक हो?

- a) 25
- b) 15
- c) 26
- d) 30

$$\frac{2 \times 3}{7} \quad \frac{7}{2 \times 2} = \frac{7}{4}$$

coaching center

Prime  $\rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 70 \\ \hline & 14 \\ \hline & 2 \\ & \downarrow \\ & 16 \end{array}$$

125. Find the maximum value of P such that  $\frac{70!}{5^p}$  is an integer.

P का सबसे अधिकतम मान ज्ञात कीजिये जिससे  $\frac{70!}{5^p}$  एक पूर्णांक हो?

a) 16

b) 17

c) 18

d) 19

coaching center

126. If  $6^k$  is a factor of  $90!$ , what is the maximum possible value of  $k$ ?

अगर  $6^k$ ,  $90!$  का एक गुणनखंड है तो  $k$  का अधिकतम संभव मान ज्ञात करें।

a) 15

b) 17

c) 44

d) 86

$$\frac{90!}{6^k}$$

$$6 = 3 \times 2$$

\*जिस prime no का जोर available

6	90
	15
	2
	17

~~X~~

3	90
	30
	10
	3
	1

↓ 44

2	90
	45
	22
	11
	5
	2
	1

↓ 86

pencil	eraser
44	86
44 बर्यो	

$$49 = 7 \times 7$$

$$\begin{array}{r|l} 7 & 200 \\ \hline & 28 \\ \hline & 4 \end{array}$$

} 32 बार 7 है

49 → 2 बार 7 चाहिए

↘ 7 × 7

127. If  $\frac{200!}{49^x}$  is an integral value, then find the maximum value that x can have.

यदि  $\frac{200!}{49^x}$  एक सम्पूर्ण मान है, तो x का अधिकतम मान क्या हो सकता है।

a) 32

b) 16

c) 11

d) 4

$$\frac{32}{2} = \underline{\underline{16}} \text{ बार } 7 \checkmark$$

coaching center

$$\frac{82!}{4^n} \rightarrow 38, \textcircled{39}, 40$$

$4 = 2 \times 2$

2	82
	41
	20
	10
	5
	2
	1

$49 + 30$  ←

79 बार 2 है

128. If  $82!$  is exactly divisible by  $4^n$ , then  $n$  cannot be greater than:

अगर  $82!$ ,  $4^n$  से पूर्णतया विभाजित हो जाता है तो  $n$  निम्न में से किससे बड़ा नहीं हो सकता ?

a) 78

b) 26

c) 39

d) 40

$$2) \begin{array}{r} 79 \\ 78 \\ \hline 1 \end{array} \left( \begin{array}{l} 39 \text{ बार } 4 \text{ बना सकते हैं} \\ 1 \text{ बार } 2 \text{ बच जा रहा} \end{array} \right)$$

1 → 1 बार 2 बच जा रहा

$$\frac{100!}{24^r}$$

$$24 = 8 \times 3 = 2^3 \times 3^1$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 100 \\ \hline & 33 \\ \hline & 11 \\ \hline & 3 \\ \hline & 1 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r|l} 3 & 100 \\ \hline & 33 \\ \hline & 11 \\ \hline & 3 \\ \hline & 1 \end{array}} \right\} 48$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 100 \\ \hline & 50 \\ \hline & 25 \\ \hline & 12 \\ \hline & 6 \\ \hline & 3 \\ \hline & 1 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r|l} 2 & 100 \\ \hline & 50 \\ \hline & 25 \\ \hline & 12 \\ \hline & 6 \\ \hline & 3 \\ \hline & 1 \end{array}} \right\} 97 \text{ बार } 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 97} \\ \underline{96} \\ 1 \end{array} \quad \left( \begin{array}{l} 32 \text{ बार } 8 \\ \text{बना} \end{array} \right)$$

129. If  $100!$  is a multiple of  $24^r$ , then the maximum possible value of  $r$  is:

अगर  $100!$ ,  $24^r$  का एक गुणज है तो  $r$  का अधिकतम संभव मान ज्ञात करें।

a) 4

b) 48

c) 13

✓ d) 32

$$10 = 5 \times 2$$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 100 \\ \hline & 20 \\ \hline & 4 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r|l} 5 & 100 \\ \hline & 20 \\ \hline & 4 \end{array}} \right\} 24$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 100 \\ \hline & 50 \\ \hline & 25 \end{array} \downarrow$$

130. Find the total no of zeroes after the right most non-zero digit in  $100!$ .

100! में गैर-शून्य अंकों के दाईं ओर कुल शून्यों की संख्या ज्ञात कीजिये।

a) 9

b) 10

~~c) 24~~

d) 25

$$100 \times 32 = 32 \boxed{00}$$

$$1000 \times 302 = 302 \boxed{000}$$

10 की वजह से

4                      3

coaching center

13). Find the total no of zeroes after the right most non-zero digit in 120!

120! में गैर-शून्य अंकों के दाईं ओर कुल शून्यों की संख्या ज्ञात कीजिये:

a) 12

b) 10

c) 24

d) 28

$$\begin{array}{r|l} 5 & 120 \\ \hline & 24 \\ \hline & 4 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 24 \\ 4 \end{array} \right\} 28$$

*coaching center*

$$2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \times \dots \times 398 \times 400$$

$$= 2^{200} (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 199 \times 200)$$

$$= 2^{100} \times 200!$$

5	200	
	40	}
	8	
	1	

$$5 \times 2 = 10$$

132. Numbers 2, 4, 6, 8, 10,.....396, 398, 400 are multiplied together. The number of zeroes at the end of the product on the right will be equal to-

संख्या 2, 4, 6, 8, 10.....196, 198, 200 को आपस में गुणा किया। गुणनफल के दाईं ओर अंत में शून्यों की संख्या ज्ञात कीजिये:

- a) 49      b) 40      c) 48      d) 99

$$2+4+6$$

$$= 2(1+2+3)$$

$$2 \times 4 \times 6 \rightarrow 48$$

$$= 2^3(1 \times 2 \times 3)$$

$$8 \times 6 = 48 \rightarrow 12$$

133. Let  $n$  be an integer such that  $n!$  ends with 50 zeroes. What is the maximum possible value of  $n$ ?

$n$  एक पूर्णांक इस प्रकार है कि  $n!$  के अन्त में 50 शून्य हैं।  $n$  की अधिकतम संभव मान ज्ञात करें।

- a) 204     
  b) 205     
  c) 209     
  d) 210

$$\begin{array}{r|l}
 5 & 204 \\
 \hline
 & 40 \\
 \hline
 & 8 \\
 \hline
 & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r|l} 5 & 204 \\ \hline & 40 \\ \hline & 8 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}} \right\} 49$$

$$\begin{array}{r|l}
 5 & 205 \\
 \hline
 & 41 \\
 \hline
 & 8 \\
 \hline
 & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r|l} 5 & 205 \\ \hline & 41 \\ \hline & 8 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}} \right\} 50$$

$$\begin{array}{r|l}
 5 & 206 \\
 \hline
 & 41 \\
 \hline
 & 8 \\
 \hline
 & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r|l} 5 & 206 \\ \hline & 41 \\ \hline & 8 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}} \right\} 50$$

$$\begin{array}{r|l}
 5 & 209 \\
 \hline
 & 42 \\
 \hline
 & 8 \\
 \hline
 & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r|l} 5 & 209 \\ \hline & 42 \\ \hline & 8 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}} \right\} 51$$

coaching center

$$n^2 = 25^{64} \times 64^{25}$$

$$2^{10} = 1024$$

$$2^{11} = 2048$$

$$n = \sqrt{25^{64} \times 64^{25}}$$

$$= 5^{64} \times 8^{25}$$

$$= 5^{64} \times (2^3)^{25}$$

$$= 5^{64} \times 2^{75}$$

$$= \boxed{5^{64} \times 2^{64}} \times 2^{11}$$

$$= 2^{11} \times 10^{64} = \overset{14}{\overbrace{2048}^{14}} 0000 \dots 00$$

134. The number  $25^{64} \times 64^{25}$  is the square of a natural number  $n$ . The sum of digits of  $n$  is संख्या  $25^{64} \times 64^{25}$ , प्राकृतिक संख्या  $n$  का वर्ग है।  $n$  के अंकों का योग ज्ञात कीजिये:

a) 7

b) 14

c) 21

d) 28

$$\sqrt{25^{64}} = 25^{\frac{64}{2}} = 25^{32}$$

$$\sqrt{5^{64} \times 5^{64}} = 5^{64}$$

$$25^{64} = (5 \times 5)^{64}$$

$$10! = 10 \times 9!$$

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times \boxed{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \times 8!$$

$$= 10 \times 9!$$

$$= 10 \times 9 \times 8!$$

5		125	
		25	} 31
		5	
		1	

135. Find the zeros at end of  $(126! - 125!)$

$(126! - 125!)$  के अंत में शून्य खोजें।

a) 34

b) 35

c) 31

d) 30

$$126 \times 125! - 125!$$

$$= 125! (126 - 1)$$

$$= 125! \times 125$$

$$= \underbrace{31 \text{ बार } 5}_{\text{from } 125!} \times \underbrace{3 \text{ बार } 5}_{\text{from } 125}$$

34

$$10 = 2 \times 5$$